Office - Peters Hall

Barnard College Library
JUN 2 1926
Not to be Drawn

Physikalische Zeitschrift

begründet von **E. Riecke** und **H. Th. Simon**

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von **Johannes Stark**

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 11. Ausgegeben am 1. Juni 1926. No. 711. Printed in Germany. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Cl. Schaefer, Über den sogenannten Schwarz- und Weißgehalt von Pigmenten in der Ostwaldschen Farbensystematik. S. 347—353.

E. Buchwald, Intensitätskoppelung im Opaleszenzfelde. S. 353—361.

E. Friedländer, Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energiespeichern. S. 361—366.

H. Herbst, Über die Dampfdruckkurve und die molekulare Verdampfungswärme des flüssigen Kohlenstoffes. S. 366—371.

W. Schmidt, Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft. S. 371—378.

R. O. Herzog, Bemerkungen zu der Mitteilung von Herrn E. Ott: „Röntgenometrische Untersuchungen an hochpolymeren organischen Substanzen zum Zwecke einer Abgrenzung des Molekulargewichts derselben". S. 378—379.

K. C. Kar, Die Molekularzerstreuung des Lichtes beim kritischen Zustande. S. 380—381.

Besprechungen:

H. v. Jüptner, Gas, Dampf und Flüssigkeit. S. 382.

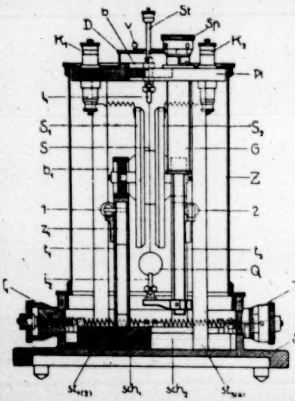
A. Schulze, Die thermische Leitfähigkeit. S. 382.

Personalien. S. 382.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



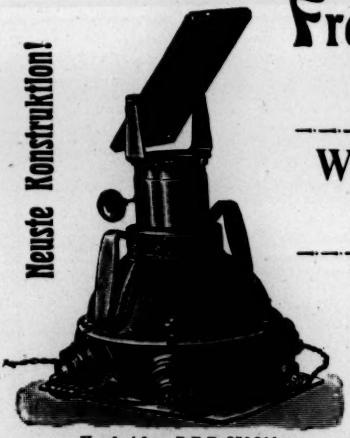
Saiten-Elektrometer

nach Lutz-Edelmann (neue Form).

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Neuste Konstruktion!



Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 11. 1. Juni 1926. Redaktionsschluß für No. 13 am 10. Juni 1926. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Cl. Schaefer, Über den sogenannten Schwarz- und Weißgehalt von Pigmenten in der Ostwaldschen Farbensystematik. S. 347.

E. Buchwald, Intensitätskoppelung im Opaleszenzfelde. S. 353.

E. Friedländer, Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energiespeichern. S. 361.

H. Herbst, Über die Dampfdruckkurve und die molekulare Verdampfungswärme des flüssigen Kohlenstoffes. S. 366.

W. Schmidt, Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft. S. 371.

R. O. Herzog, Bemerkungen zu der Mitteilung von Herrn E. Ott: „Röntgenometrische Untersuchungen an hochpolymeren organischen Substanzen zum Zwecke einer Abgrenzung des Molekulargewichts derselben". S. 378.

K. C. Kar, Die Molekularzerstreuung des Lichtes beim kritischen Zustande. S. 380.

Besprechungen:

H. v. Jüptner, Gas, Dampf und Flüssigkeit. S. 382.

A. Schulze, Die thermische Leitfähigkeit. S. 382.

Personalien. S. 382.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den sogenannten Schwarz- und Weißgehalt von Pigmenten in der Ostwaldschen Farbensystematik.

Von Clemens Schaefer.

1. Es ist wohl allgemein bekannt, daß Ostwald[1]) ein Pigment durch 3 Angaben zu charakterisieren versucht, den „Schwarzgehalt" S, den „Weißgehalt" W, und den „Farbton". Nach ihm setzen sich Schwarzgehalt S, Weißgehalt W und „Farbgehalt" (Gehalt an „reiner" Farbe) F zu der Gleichung zusammen:

$$S + W + F = 1,$$

die er zur Charakterisierung ihrer Bedeutung für die Farbentheorie mit dem — Ohmschen Gesetze vergleicht.

Ostwald hat auch Methoden angegeben, mittels deren der Schwarz- und Weißgehalt bestimmt werden soll. K. W. F. Kohlrausch[2]) hat in mehreren Aufsätzen in dieser Zeitschrift schlagend bewiesen, daß einmal durch diese Art von Charakterisierung eines Pigments lediglich Unklarheit in ein Gebiet hineingetragen wird, das nach den Arbeiten von Helmholtz und seiner Vorgänger wohl geordnet war, und hat insbesondere auch gezeigt, daß die Ostwaldsche sog. Messung des Schwarz- und Weißgehaltes schon aus dem Grunde zu verwerfen ist, weil sie sich nur auf 2 Punkte der Remissionsfunktion (Maximum und Minimum) stützt, statt auf die ganze Remissionskurve; weiteres zu dieser Frage siehe weiter unten.

1) Vgl. z. B. Ostwald, Physik. Zeitschr. 17, 322, 1916.
2) K. W. F. Kohlrausch, Physik. Zeitschr. 21, 396, 423, 473, 1920.

Trotzdem hat die scheinbare Einfachheit dieser Farbsystematik offenbar in weiten Kreisen großen Eindruck gemacht: Die Ostwaldsche Lehre dringt bereits — unter Verdrängung der klassischen Theorien — in die elementaren Lehrbücher der Physik ein, wo sie naturgemäß ohne Kritik referiert — und aufgenommen wird.

Unter diesen Umständen scheint es doch notwendig zu sein, obwohl alles Wesentliche in eindrucksvoller Weise schon bei Kohlrausch zu lesen ist, noch einmal auf die Frage des Schwarz- und Weißgehaltes zurückzukommen.

2. Ostwald selbst mißt seiner Lehre vom Schwarz- und Weißgehalt offenbar größte Bedeutung zu. Nach ihm ist die Zumischung eines Schwarzsektors am Farbenkreisel zu einem farbigen Pigment durchaus etwas anderes, als — wie man bisher immer angenommen hat — lediglich Herabsetzung der Helligkeit. Nach seiner Behauptung beruht z. B. auf dem Schwarzgehalt die Braunfärbung gelber und roter Pigmente, das Auftreten von olivgrünen Tönen usw., die man im Spektroskop niemals sieht, auch wenn die Spektralfarbe beliebig verdunkelt wird. Gerade daraus soll man nach Ostwald ersehen, daß Zumischung eines Schwarzsektors durchaus etwas anderes ist, als Verdunkelung des Pigments.

Unter diesen Umständen ist es vielleicht nützlich, über ein paar einfache Versuche zu berichten, die ich angestellt habe, um den Einfluß der Hinzufügung eines Schwarz- oder Weißsektors zu einem Pigment am Farbenkreisel messend festzustellen. Es ist mir nicht bekannt, ob derartige sehr naheliegende Messungen schon einmal ausgeführt sind; ich habe auch keine Zeit darauf verwendet, die Literatur daraufhin

durchzusehen; angestellt habe ich sie ursprünglich, um mir selbst, als ich anfing, mich mit der Farbentheorie zu beschäftigen, Klarheit über diesen Punkt zu verschaffen. Man scheint es bisher — d. h. bis zur Farbentheorie Ostwalds — stets als sicher und geradezu als selbstverständlich angenommen zu haben, daß ein Schwarzsektor nichts anderes bewirken könne, als Verminderung der Helligkeit. In der Literatur finde ich neben vielen Stellen, die diese letztere Auffassung einfach als sicher angeben, nur eine Stelle bei Maxwell, die bemerkenswerterweise vorsichtiger gefaßt ist: „Black, which has hardly any effect whatever except in decreasing the amount of the colour." Aus dieser vorsichtigen Fassung darf man wohl schließen, daß eine experimentelle Prüfung auch von ihm nicht versucht wurde[1]).

Meine Versuche waren in folgender Weise angestellt: Auf dem Farbenkreisel wurde zu einem gelben (oder grünen) Pigment ein Schwarzsektor hinzugefügt: Der Winkel desselben möge den αten Teil des Kreisumfanges betragen. Nach der bisherigen Auffassung würde dadurch lediglich das Remissionsvermögen R des Pigments herabgesetzt auf

$$(1 - \alpha)\, R,$$

und das könnte durch Erhöhung der Beleuchtung für das Auge wieder ununterscheidbar von R gemacht werden; es wäre dasselbe Pigment, nur dunkler als ohne Schwarzsektor. Nach der Ostwaldschen Auffassung dagegen würde die ganze Farbqualität des Pigments durch Hinzufügen des Schwarzsektors so grundlegend geändert, — Braun und Olivgrün! — daß auf keine Weise durch Erhöhung der Beleuchtung Ununterscheidbarkeit mit dem ursprünglichen Pigment herbeigeführt werden könnte.

Bei meinen Versuchen betrug die Größe des Schwarzsektors der Reihe nach $^1/_4$, $^1/_2$ und $^3/_4$ des ganzen Kreises. Darüber wurde in bekannter Weise ein kleinerer Kreis vom gleichen Pigment ohne Schwarzsektor befestigt. Wurde also der Farbenkreisel in Rotation versetzt, so hatte man nebeneinander einen inneren Vollkreis mit gelbem (oder grünem) Pigment, umgeben von einem Kreisring, auf dem die gleiche Pigmentfarbe mit den angegebenen Schwarzsektoren gemischt war. Es wurde nun der rotierende Farbenkreisel stark beleuchtet und dann durch eine Linse der äußere Kreisring mit Schwarzsektor auf der einen, der innere Vollkreis mit Vollpigment auf der anderen Spalte

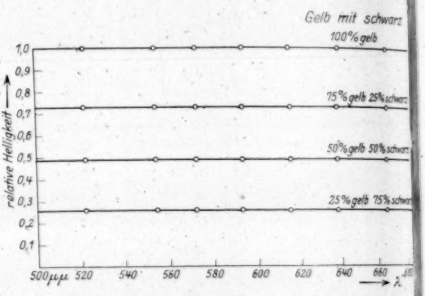


Fig. 1.

eines Spektralphotometers nach König-Martens abgebildet. Wurden nun für irgendeine Wellenlänge die beiden Felder, die man im Fernrohr des Spektralphotometers sah, durch Drehen des Nicols auf gleiche Helligkeit gebracht, so mußte dieselbe Einstellung für alle Wellenlängen gültig sein, wenn die alte Auffassung von der Wirkung des Schwarzsektors

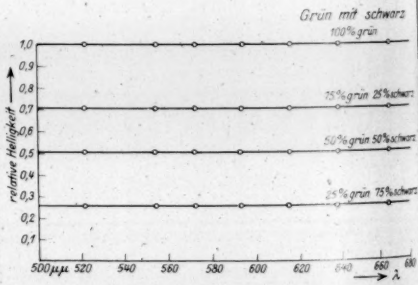


Fig. 2.

die richtige war. Nahm man das Prisma dann fort, so mußten beide Felder auch im unzerlegten Lichte jetzt ununterscheidbar sein.

Der Versuch ergab, daß dies in der Tat der Fall war, wie die beiden Fig. 1 und 2 belegen mögen, die wohl ohne weitere Erläuterung verständlich sind: Als Ordinaten sind die relativen Helligkeiten, als Abszissen die Wellenlängen aufgetragen.

1) Anmerkung bei der Korrektur: Aus einer brieflichen Mitteilung von Herrn Kohlrausch habe ich inzwischen ersehen, daß bereits Exner (Wiener Berichte, Abt. IIA, **127**, 1829, 1910) ähnliche Versuche mit demselben Ziele und demselben Ergebnis angestellt hat. Diese waren mir leider nicht bekannt. In Abt. III seiner Abhandlung finden sich auch ganz ähnliche Gedankengänge, wie ich sie am Schlusse meiner zweiten Mitteilung über heterochromatische Photometrie (Physik. Zeitschr. **26**, 908 ff., 1925) unter Nr. 4 und 5 ausgesprochen habe. So sehr ich bedaure, Exners gedankenreiche Arbeit nicht gekannt zu haben, so sehr darf ich mich über diese Übereinstimmung der Ergebnisse freuen.

Insbesondere ersieht man noch quantitativ, daß die Einschaltung eines Schwarzsektors von $^1/_4$, $^1/_2$ oder $^3/_4$ der Kreisfläche in der Tat die Helligkeit des Pigments fast genau auf $^3/_4$, $^1/_2$ oder $^1/_4$ der ursprünglichen herabsetzt; die kleinen Abweichungen sind natürlich dadurch veranlaßt, daß das „schwarze" Pigment de facto nicht ideal schwarz ist, sondern noch etwas reflektiert. Die Versuche können auch in folgender Weise angestellt werden, in der sie sich als Vorlesungsversuche eignen: Auf dem Farbkreisel ist der Schwarzsektor — umgekehrt wie vorhin — innen angeordnet; außen befindet sich also ein Kreisring von Vollpigment. Man beleuchtet den ganzen Farbkreisel mit einer Bogenlampe, wobei nun bei Rotation der innere Kreis dunkler erscheint. Mittels einer zweiten identischen Bogenlampe beleuchtet man durch ein Diaphragma von geeigneter Größe vermittels eines Objektivs lediglich diesen inneren dunkleren Kreis; diese Zusatzbeleuchtung kann entweder durch Nicols oder durch eine Irisblende variabel gemacht werden. Man findet dann stets eine bestimmte Helligkeit dieser Zusatzbeleuchtung, bei der der innere Kreis mit Schwarzsektor und der äußere Kreisring mit Vollpigment ununterscheidbar sind[1]).

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis:

Es kann gar kein Zweifel darüber bestehen, daß Zumischung eines Schwarzsektors lediglich Verdunkelung bewirkt, die demgemäß durch stärkere Beleuchtung kompensiert werden kann, ganz im Einklang mit der bisherigen, ganz im Gegensatz zu der Ostwaldschen Auffassung.

Es mag erwähnt werden, daß die Versuche nur mit gutem, mattem Schwarzpigment gelingen, das nicht merklich reflektiert: Andernfalls sind zwar kleine, aber deutlich bemerkbare Variationen der Einstellung vorhanden, wenn man durch das Spektrum hindurchgeht. Es wird daher gut sein, bei Versuchen über Schwarzzumischung beim Farbenkreisel sich bei der Beurteilung des Schwarz nicht auf den oberflächlichen Eindruck zu verlassen, sondern stets eine Messung nach Art der oben beschriebenen auszuführen. Erst dann kann man absolut sicher sein, daß die Resultate einwandfrei sind.

3. Kohlrausch bemängelt mit Recht, daß in der Ostwaldschen Lehre Schwarz- und Weißgehalt als etwas Gleichwertiges betrachtet werden, voraussichtlich hervorgerufen durch die mechanische Gleichartigkeit der Hinzufügung von Schwarz- und Weißsektoren beim Farbenkreisel oder von weißen und schwarzen Pigmenten zu farbigen. Die Zumischung eines Weißsektors hat natürlich eine ganz andere Wirkung, als die eines Schwarzsektors. Denn der letztere reduziert das Remissionsvermögen R auf $(1-a)R$, und damit ist seine Wirkung erschöpft; der Weißsektor hingegen fügt zu diesem reduzierten Werte $(1-a)R$ seine eigene Remission hinzu, sodaß man für die mittlere Remission des Pigments mit Weißsektor auf dem Farbenkreisel erhält:

$$(1-a)R + a,$$

d. h. die Zumischung eines Weißsektors ändert die mittlere Remissionskurve total ab, und Änderungen der Helligkeit können das niemals kompensieren. Auch davon kann man sich in derselben Weise überzeugen wie oben, nämlich durch spektralphotometrische Ausmessung. Die beiden Fig. 3 und 4 zeigen dies deutlich und bringen schlagend die Verschiedenheit der Zumischung von Schwarz und Weiß zum Ausdruck[1]).

4. Da Ostwald den angeblichen Schwarzgehalt in Verbindung mit der „Braunfärbung" geeigneter roter und gelber Pigmente bringt, so berichte ich noch über ein paar Versuche, zu denen mich Herr Kohlrausch brieflich angeregt hat, dem ich auch an dieser Stelle für seinen freundlichen Rat bestens danke. Aus dem Ostwaldschen Atlasse wurden von einer unbeteiligten Person braune Pigmente herausgesucht; diese hatte lediglich den Auftrag, die ihr am besten braun erscheinenden Täfelchen herauszusuchen und wußte nichts vom Zwecke der Messung. Es waren unter anderen die Plättchen 21 von oi, 17 von ni, 13 von ng, 21 von lh, 25 von og, 13 von pi. Außerdem standen mir braune Farbtäfelchen aus Katalogen der Höchster Farbwerke zur Verfügung, von denen zwei ausgewählt wurden. Sehr gut eignet sich auch zu diesem Versuch ein Schokoladetäfelchen.

Ein solches Plättchen wurde durch eine Lichtquelle stark beleuchtet, dann durch eine Linse ein Bild desselben auf dem einen Spalt eines Glanschen Spektralphotometers entworfen, von dem das Prisma entfernt war. Der andere Spalt wurde mit Hilfe eines Monochromators (von C. Leiß in Steglitz) mit spektral zerlegtem Licht (derselben Lichtquelle) beleuchtet; diesem spektralen Licht konnte durch eine Hilfs-

1) Anmerkung bei der Korrektur: In ähnlicher Weise sind Exners Versuche (siehe die Anmerkung bei der Korrektur S. 348) angestellt. Kohlrausch bemerkt mir brieflich mit Recht, daß diese Anordnung, bei der beidäugig relativ große Felder betrachtet werden, beweisender ist, als die zuerst beschriebene, bei der ein Spektralapparat benutzt wird.

1) Auch diese Versuche kann man natürlich in derselben Weise als Demonstrationsversuche anstellen, wie es vorhin bei denjenigen mit Schwarzsektor beschrieben wurde.

vorrichtung mit zwei Nicols (im folgenden als Hilfsnicols bezeichnet) Weiß in variabler Stärke zugemischt, die Farbe also geeignet „entsättigt"

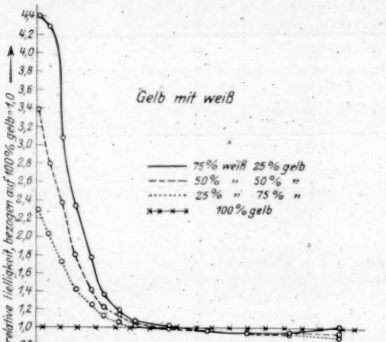


Fig. 3.

werden. Durch Drehen des Photometernicols am Glan-Photometer konnte gleiche Helligkeit, durch Drehen der Monochromatorschraube gleicher Farbton, durch Drehen des Hilfsnicols

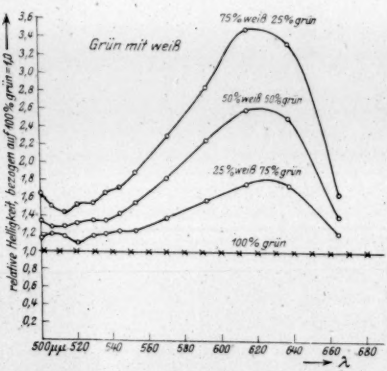


Fig. 4.

gleiche Sättigung eingestellt werden. Es war in der Tat möglich, auf diese Weise zu den sämtlichen braun erscheinenden Plättchen, die den einen Spalt beleuchteten, eine Beleuchtung des zweiten Spaltes mit geeignet entsättigtem Spektrallicht herzustellen, sodaß die beiden aneinanderstoßenden Felder für das Auge ununterscheidbar waren.

Der Versuch beweist, „daß man im Spektralapparat alles zur Verfügung hat, was man zur Herstellung jener Lichtmischung braucht, die auf großen Flächen gesehen, „Braun-Empfindung auslöst"[1]). Mit dem „Schwarzgehalt" hat das Braun aber nichts zu tun.

Es ist mir unbekannt, ob derartige Messungen schon früher ausgeführt sind, aber das ist auch unwesentlich. Es schien mir in jedem Falle nützlich, sie mitzuteilen, mit Rücksicht auf die Verwirrung, die die Ostwaldsche Lehre vom Schwarzgehalt in weiten Kreisen bereits angerichtet hat und weiter anzurichten droht. Als bemerkenswert zu den Messungen ist vielleicht noch anzuführen, daß bei den untersuchten Ostwaldschen Pigmenten stets ein starker Weißzusatz erforderlich war, bei den Pigmenten der Höchster Farbwerke hingegen ein sehr viel kleinerer. Letztere machten in der Tat einen viel gesättigteren Eindruck, als die Ostwaldschen.

Noch einen weiteren Versuch habe ich auf Kohlrauschs Vorschlag ausgeführt. Die beiden Spalte des Spektralphotometers (ohne Prisma) wurden mit Hilfe des Monochromators mit gelbem oder rötlichem Licht beleuchtet, dann durch Drehen des Nicols das eine Feld stark abgedunkelt und ev. Weiß hinzugefügt. Dann fing — auch bei zentraler Beobachtung, bei der sonst im Spektralapparat kein Braun-eindruck auftritt — diese Spalthälfte an, bräunlich zu werden. Der Versuch gelang z. B. ganz gut mit *D*-Licht, noch besser mit etwas rötlicheren Farbtönen. Er bringt zum Ausdruck, daß auch bei zentralem Sehen durch geeigneten Kontrast braun „erzeugt" werden kann. Auch hier ist natürlich von einem Ostwaldschen Schwarzgehalt nicht die Rede.

Hier mag noch auf einen Punkt hingewiesen werden, der mit dem Obigen in engem Zusammenhange steht. Es wird häufig von Anhängern der Ostwaldschen Farbensystematik behauptet, daß sie die „braunen" und „olivgrünen" Pigmente umfasse (d. h. durch Schwarz- und Weißgehalt und Farbton zu charakterisieren imstande sei), während dies z. B. die Helmholtzsche Darstellung, die die Pigmente im Farbendreieck festlegt, nicht könne. Trotz der Bestimmtheit, mit der diese Behauptung auftritt — sie ist mir bei Gelegenheit von Vorträgen über die Ostwaldsche Systematik mehrfach entgegengehalten worden —, ist sie unrichtig. Denn „Braun" und „Olivgrün" sind — wie Ostwald auch selbst hervorhebt —

1) Briefliche Formulierung von Kohlrausch.

Erscheinungen, die bei „unbezogenen" Pigmenten nie auftreten, d. h. das betreffende Plättchen macht erst durch Kontrast (im allgemeinen mit seiner Umgebung) den Eindruck „braun" bzw. „olivgrün". Dieser Eindruck verschwindet aber sofort, wenn man dasselbe Plättchen in lichtloser Umgebung (etwa im Spalt eines Spektralapparates) foveal sieht, d. h. wenn das Pigment in der üblichen Ausdrucksweise „unbezogen" ist. Nun hat bereits Kohlrausch treffend hervorgehoben, daß auch die Ostwaldsche Farbensystematik es nur mit unbezogenen Pigmenten zu tun hat; sonst wäre es ja überhaupt nicht denkbar, ein Pigment nur durch drei Bestimmungsstücke zu charakterisieren. Die Sache liegt also so: Pigmente (z. B. gelbe), die unter geeigneten Umständen braun und olivgrün erscheinen können, (nämlich bei geeigneter „Bezogenheit") haben freilich ihren Platz bei Ostwald, aber nur als unbezogene, nicht als braune oder olivgrüne Pigmente. Das aber ist natürlich im Prinzip genau so bei der Helmholtzschen Charakterisierung des Pigments durch seine Festlegung im Farbendreieck. Ostwald hat das oben erwähnte Mißverständnis allerdings sehr stark durch seine Darstellung verschuldet, die den Eindruck erweckt, als ob seine Theorie bezogene Pigmente erfassen könnte. Eine Überlegenheit der Ostwaldschen Systematik über die Helmholtzsche ist auch in diesem Punkte keineswegs vorhanden.

5. Es ist eine bekannte Tatsache, daß unendlich viele verschiedene Farbenmischungen für das Auge ununterscheidbar sind, da die Farbenmannigfaltigkeit von dreifacher, die der Farbenmischungen von unendlich hoher Mächtigkeit ist. Demgemäß existieren unter anderen unendlich viele Pigmente mit verschiedenen Remissionskurven, die für das Auge ununterscheidbar sind; sie werden nach Ostwald zwar verschiedenen Weiß- und Schwarzgehalt haben, also an verschiedenen Stellen in seinem Farbdoppelkegel stehen, ohne daß das Auge, das doch der oberste und einzige Richter in Farbangelegenheiten ist, irgend einen Unterschied zwischen diesen Pigmenten feststellen könnte. Derartige Farben nennt Ostwald „metamer"[1]). Ihre Existenz allein ist offenbar tödlich für die Ostwaldsche Farbensystematik, weil völlig ununterscheidbare Pigmente an unendlich vielen verschiedenen Stellen des Farbdoppelkegels stehen.

Man könnte indessen glauben, es könne mit Hilfe der Tatsache der „Metamerie" gelingen, der Frage doch noch eine positive Wendung zu geben, indem man die Ostwaldsche Farbensystematik so zu modifizieren versucht, daß seine Grundgedanken — Charakterisierung eines Pigments durch Schwarz- und Weißgehalt — beibehalten werden könnten. Dieser Gedanke ist mir gelegentlich eines Vortrages von meinem Kollegen Madelung ausgesprochen worden. Wir versuchen, ihn im folgenden zu prüfen.

Nach Ostwald ist das Remissionsvermögen der sogenannten Vollfarben dadurch charakterisiert, daß sie in dem einen „Farbenhalb" alles remittieren, in dem anderen alles absorbieren. In Fig. 5 bedeuten die Abszissen die Wellenlängen, die an einigen Stellen in Klammern daruntergesetzten Zahlen sind die Ostwaldschen

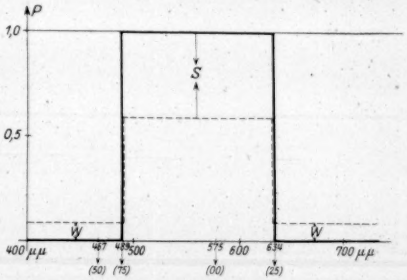


Fig. 5.

Kennziffern für den Farbton, als Ordinate ist das Remissionsvermögen genommen. Die ausgezogene Kurve ist das Remissionsvermögen für die Vollfarbe, die bei Ostwald durch die Zahl oo charakterisiert ist. Nach Ostwald remittiert sie demgemäß vollkommen in dem Farbenhalb, daß durch die Zahlen 25 bis oo und oo bis 75 begrenzt wird, während von 25 bis 50 und von 50 bis 75 nichts remittiert wird.

Vollfarben aber gibt es in der Natur nicht, und die wirklich reellen Pigmente sollen nach Ostwald zwar noch immer in je einem Farbenhalb konstant remittieren und absorbieren, aber nicht mehr vollkommen: man erhält etwa die punktierte Kurve in Fig. 5. Der Betrag des im „Absorptionsfarbenhalb" noch remittierten Lichtes ist der Ostwaldsche Weißgehalt W, der Abstand der im „Remissionsfarbenhalb" verlaufenden gestrichelten Kurve vom Maximalwerte 1 der Ostwaldsche Schwarzgehalt S.

Träfen diese Annahmen über die Remissionskurven der Pigmente zusammen mit dem

[1]) Die Tatsache der „Metamerie" hat Ostwald, was sehr charakteristisch, aber hier für uns nebensächlich ist, für eine neue Entdeckung. In Wirklichkeit ist sie, wie Kohlrausch und Schrödinger betont haben, sozusagen das Normalphänomen der Farbenlehre. Neu ist lediglich der Name „Metamerie".

Satz vom Farbenhalb zu, so würden in der Tat die Werte W und S zusammen mit dem Farbton (in unserem Beispiel also mit der Kennziffer oo) die Pigmente charakterisieren, da eben die jeweilige Remissionskurve durch diese Angaben vollkommen bestimmt wäre, — und auf dieser beruht ja alles Weitere, denn sie charakterisiert die Farbenmischung bzw. die Mischfarbe des Pigments.

Tatsächlich sieht die Remissionskurve unter Umständen sehr anders aus, als die Ostwaldsche Schematisierung es will. In Fig. 6 ist die ausgezogene Kurve die Remissionskurve des Plättchens oo aus dem Farbkreise *nc* nach Messungen von Kohlrausch und Gibsone. In diesem Falle ist der Unterschied freilich recht groß: es gibt aber viele Fälle, in denen

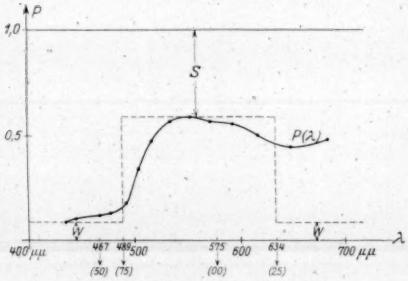


Fig. 6.

er wesentlich kleiner sein kann. Doch nicht darauf kommt es hier an.

Um sein Verfahren zu retten, bestimmt Ostwald Schwarz- und Weißgehalt lediglich nach dem höchsten und tiefsten Punkt der Kurve (siehe Fig. 6), betrachtet also — im Widerspruch mit allen Erfahrungen über Farbenmischung — die übrigen Teile der Kurve als irrelevant: Auch hierauf hat schon Kohlrausch hingewiesen; erst kürzlich hat Schrödinger dies wieder gegen Oryng betont.

Daß dies Verfahren unhaltbar ist, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel. Aber gerade die Tatsache der „Metamerie" könnte vielleicht nach dem Gedanken des Herrn Madelung die Ostwaldsche Systematik retten. Denn da es unendlich viele verschiedene remittierende Pigmente gibt, die für das Auge ununterscheidbar sind, so könnte man vermuten, daß man etwa die beobachtete (ausgezogene) Remissionkurve der Fig. 6 durch „metamere Deformation" in die Gestalt der gestricheiten Kurve der Fig. 6 bringen könnte, die die Ostwaldsche „Normalform" der Remissionskurve darstellt. Dann wäre es ja in der Tat möglich, alle gleich aussehenden Pigmente durch dasjenige unter ihnen zu charakterisieren, dessen Remissionskurve der gestrichelten Linie in Fig. 6 entspricht und die also durch S und W nebst dem Farbton (Kennziffer des Plättchens) charakterisiert werden kann. Indessen läßt sich leicht zeigen, daß dieser Gedankengang nicht durchführbar ist. Im Gegenteil ergibt sich bei seiner Verfolgung ein besonders anschaulicher Nachweis dafür, daß S und W eben nicht ausreichen, ein Pigment zu charakterisieren.

Nehmen wir also einmal an, die beiden in Fig. 6 dargestellten Remissionskurven gehörten „metameren", d. h. ununterscheidbaren, Pigmenten an. Sei die ausgezogene Remissionskurve $P(\lambda)$, so können wir nach Helmholtz und Maxwell die Koordinaten dieses Pigmentes durch seinen Gehalt an drei bestimmten Farben[1] R, G, B (etwa Rot, Grün, Blau) angeben, wenn etwa das Normalspektrum des Sonnenlichtes in diesen Farben geeicht ist. Seien also $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $B(\lambda)$ die Koordinaten einer Spektralfarbe λ aus dem Normalspektrum des weißen Sonnenlichtes, so sind die Koordinaten I_1, I_2, I_3 des Pigmentes mit der Remissionskurve $P(\lambda)$ bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda;\quad I_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda) G(\lambda)\, d\lambda; \\ I_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} P(\lambda) B(\lambda)\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn λ_0 und λ_1 die Grenzen des sichtbaren Spektrums bedeuten: diese Koordinaten (oder vielmehr schon ihre Verhältnisse) legen einen bestimmten Punkt im Farbdreieck fest, dessen Ecken die Farben R, G, B bilden. I_1, I_2, I_3 sind also gegebene konstante Größen.

Für die gestrichelte Remissionskurve der Fig. 6 werden die Koordinaten entsprechend folgende sein:

$$\left.\begin{aligned} W\int_{\lambda_0}^{\lambda'} R\,d\lambda + (1-S)\int_{\lambda'}^{\lambda''} R\,d\lambda + W\int_{\lambda''}^{\lambda_1} R\,d\lambda, \\ W\int_{\lambda_0}^{\lambda'} G\,d\lambda + (1-S)\int_{\lambda'}^{\lambda''} G\,d\lambda + W\int_{\lambda''}^{\lambda_1} G\,d\lambda, \\ W\int_{\lambda_0}^{\lambda'} B\,d\lambda + (1-S)\int_{\lambda'}^{\lambda''} B\,d\lambda + W\int_{\lambda''}^{\lambda_1} G\,d\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

[1] Es brauchen natürlich nicht die sog. Echtfarben der Dichromaten zu sein, sondern irgend drei konkret gegebene Farben R, G, B, von denen keine aus den beiden andern mischbar ist.

wenn λ' und λ'' nach Fig. 6 die Grenzen des Remissionsfarbenhalbs (25 [über oo] bis 75) sind. Etwas anderes geschrieben haben wir mit $1 - S = S'$ statt (2):

$$\left.\begin{aligned} W\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda'} + \int_{\lambda''}^{\lambda_1} R\,d\lambda\right] + S'\int_{\lambda'}^{\lambda''} R\,d\lambda, \\ W\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda'} + \int_{\lambda''}^{\lambda_1} G\,d\lambda\right] + S'\int_{\lambda'}^{\lambda''} G\,d\lambda, \\ W\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda'} + \int_{\lambda''}^{\lambda_1} B\,d\lambda\right] + S'\int_{\lambda'}^{\lambda''} B\,d\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Darin sind die Integrale gleichfalls feste gegebene Größen, da ja durch den Satz vom Farbenhalb die Wellenlängen λ' und λ'' für jedes Pigment fest gegeben sind. In etwas anderer Bezeichnung haben wir also statt (3) für die Koordinaten dieses Pigments:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 W + \alpha_2 S' \\ \beta_1 W + \beta_2 S' \\ \gamma_1 W + \gamma_2 S' \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Nach Voraussetzung sollen aber die beiden Pigmente, deren Remissionskurven Fig. 6 darstellt, ununterscheidbar sein, also müssen ihre Koordinaten (1) und (4) übereinstimmen. Wir haben also die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 W + \alpha_2 S' - I_1 = 0 \\ \beta_1 W + \beta_2 S' - I_2 = 0 \\ \gamma_1 W + \gamma_2 S' - I_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Betrachtet man diese als Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten W und S', so sieht man, daß sie nur dann durch von Null verschiedene Werte dieser Unbekannten erfüllt werden können, wenn ihre Determinante verschwindet, wenn also:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & I_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & I_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & I_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Diese Gleichung ist aber im allgemeinen natürlich nicht erfüllt, da ja die in den I steckende Remissionsfunktion $P(\lambda)$ innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich ist. Nur in Ausnahmefällen könnte, gewissermaßen zufällig, Gleichung (6) erfüllt sein.

Es ergibt sich also, daß unter Zugrundelegung des Ostwaldschen Satzes vom Farbenhalb die Remissionskurve $P(\lambda)$ eines Pigments nicht „metamer" so deformiert werden kann, daß sie der gestrichelten Kurve in Fig. 6 entspricht, die durch W und S charakterisierbar wäre.

Läßt man nun den Satz vom Farbenhalb fallen, indem man etwa die untere oder die obere Grenze λ' und λ'' des Remissionsgebietes oder beide Grenzen zusammen als unbekannt betrachtet und demgemäß durch x und y bezeichnet, so kann (6) geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(xy) & \alpha_2(xy) & I_1 \\ \beta_1(xy) & \beta_2(xy) & I_2 \\ \gamma_1(xy) & \gamma_2(xy) & I_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6a)$$

In diesem Falle kann man durch geeignete Wahl von x und y die Gleichung (6a) sicher erfüllen, und zwar im allgemeinen auf unendlich viele verschiedene Weise; im allgemeinen wird (6a) auch dann schon eine Lösung besitzen, wenn nur die eine der beiden Grenzen als frei verfügbar betrachtet wird. D. h. wenn man den Farbenhalbsatz Ostwalds fallen läßt, so ist es in der Tat möglich, alle metameren Pigmente eines Farbtons auf solche Pigmente zurückzuführen, denen die Ostwaldsche Normalform der Remissionskurve zukommt, nur daß eben das Remissionsgebiet im Gegensatz zu Ostwald kein Farbenhalb mehr umfaßt, sondern größer oder kleiner ist. Daraus folgt aber wieder zwingend, daß in diesem Falle das Pigment nicht durch S und W bestimmt ist, sondern daß hierzu noch eine weitere Angabe, nämlich die Breite des Remissionsgebietes, erfordert wird. Auch hier zeigt sich also wieder, daß der Ostwaldsche Versuch, ein Pigment eines bestimmten Farbtons durch seinen Schwarzgehalt S und seinen Weißgehalt W zu charakterisieren, unmöglich ist.

Marburg, Physikalisches Institut der Universität, im März 1926.

(Eingegangen 7. April 1926.)

Intensitätskoppelung im Opaleszenzfelde.

Von Eberhard Buchwald.

1. Aussagen über die Intensitätsverteilung im Fraunhoferschen Beugungsbild eines Gitters, dessen Striche nach dem Fehlergesetze von ihrer richtigen Lage abweichen, lassen sich in sinngemäßer Übertragung aus der Arbeit von Debye[1]) entnehmen, in der der Einfluß der Wärmebewegung auf die Röntgeninterferenzen untersucht wird. Darnach stehen im Falle eines monochromatisch beleuchteten Gitters die scharfen Beugungsbilder der verschiedenen Ordnungen auf einem kontinuierlichen Untergrunde, dem „Opaleszenzfelde", dessen Intensität mit wach-

1) P. Debye, Verh. d. D. phys Ges. 15, 678, 1913.

senden Beugungswinkeln ansteigt und das den Beugungsbildern um so mehr Energie entzieht, je fehlerhafter das Gitter ist. Debye gibt die mittlere Intensität für jede Stelle des Beugungsbildes an; daß die Intensität dauernd um diesen Mittelwert schwankt, interessiert beim Kristall wenig, weil die Wärmebewegung viel zu rasch erfolgt, um Intensitätsschwankungen beobachtbar werden zu lassen. Anders beim Beugungsgitter: hier wäre die mittlere Intensität nur zu beobachten, wenn man gleich präzise Gitter in rascher Folge gegeneinander auswechselte — das einzelne Gitter dagegen zeigt entsprechend der Eigentümlichkeit gerade seiner Strichverteilung die Schwankungen im Opaleszenzfeld in der Form einer experimentell festzustellenden Aneinanderreihung von helleren und dunkleren Strichen, einer „Granulation" oder „Kannelierung" des Untergrunds[1]).

Sind die Gitter relativ sorgfältig geschnitten, so treten nur die hellsten dieser Striche hervor und wirken als „Geister", die also ihr Dasein unperiodischen Teilungsfehlern, nicht den häufig untersuchten periodischen verdanken. Die wahrscheinliche Intensität solcher Geister wird in einer gleichzeitig in den Annalen erscheinenden Arbeit bestimmt. Wird auch eine Angabe über ihre mögliche Anzahl gefordert, so ist die Vorfrage zu beantworten, inwieweit die Intensität an einer Stelle des Opaleszenzfeldes durch die Intensität an einer Nachbarstelle mitbestimmt ist, m. a. W. wie groß die „Intensitätskoppelung" zwischen den einzelnen Punkten des Opaleszenzfeldes ist. Dieses Problem wird im folgenden behandelt[2]). Es erinnert an eins aus der Brownschen Molekularbewegung: zählt man die Teilchen in einem bestimmten Raumgebiete z. B. eines Sols in äquidistanten Zeitpunkten, so sind die Zahlenangaben voneinander unabhängig, wenn die Zeitpunkte der Zählung genügend weit voneinander abstehen, während bei rascher Beobachtungsfolge jede Zählung auf die folgende eine „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung" ausübt. Was hier als Koppelung des zeitlichen Nacheinander erscheint, tritt bei uns als Koppelung des räumlichen Nebeneinander auf.

2. Das Gitter bestehe aus N unendlich schmalen Spalten; der Einfluß einer endlichen Spaltbreite läßt sich nachträglich leicht berücksichtigen. Die Gitterkonstante sei g. Der p-te Spalt liege um die Strecke ξ_p von seiner richtigen Lage entfernt, und die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung $\xi_p \dots \xi_p + d\xi_p$ sei gemäß dem Fehlergesetz

$$dw_p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p,$$

wo h das Präzisionsmaß ist. Die Wahrscheinlichkeit der Konstellation $\xi_1 \dots \xi_1 + d\xi_1, \dots \xi_N \dots \xi_N + d\xi_N$ ist dann — unter der Annahme der Unabhängigkeit aller ξ voneinander —

$$dw = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N e^{-h^2 \sum_p^{1 \dots N} \xi_p^2} d\xi_1 \dots d\xi_N.$$

Fällt paralleles Licht von der Wellenlänge λ senkrecht auf, so ist die unter dem Winkel φ abgebeugte Intensität nach der klassischen Formel[3])

$$I = \sum_n^{1 \dots N} e^{i\mu(ng + \xi_n)} \sum_m^{1 \dots N} e^{-i\mu(mg + \xi_m)} = \sum_n^{1 \dots N} \sum_m^{1 \dots N} e^{i\mu(n-m)g} e^{i\mu(\xi_n - \xi_m)} \quad (1)$$

mit der Abkürzung

$$\mu = \frac{2\pi \sin\varphi}{\lambda}. \quad (2)$$

Die mittlere Intensität $\bar{I}$ wird hieraus durch Multiplikation eines jeden I mit der Wahrscheinlichkeit dw gerade seiner ξ-Konstellation und durch nachfolgende Integration gefunden. Die Rechnung[4]) ergibt

$$\bar{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} I\, dw = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \sum_n^{1 \dots N} \sum_m^{1 \dots N} e^{i\mu(n-m)g} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu(\xi_n - \xi_m)} e^{-h^2 \sum_p^{1 \dots N} \xi_p^2} d\xi_1 \dots d\xi_N \quad (3)$$

$$= N\left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin^2 \frac{N\mu g}{2}}{\sin^2 \frac{\mu g}{2}}. \quad (4)$$

Hier stellt das zweite Glied das durch den Faktor $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$ geschwächte Fraunhofersche Beugungsbild dar; das erste Glied, vom Nullwert bei $\mu = 0$, d. h. $\varphi = 0$ mit wachsendem φ ansteigend, gibt das Opaleszenzfeld.

1) E. Buchwald, diese Zeitschr. **26**, 672, 1925.

2) Ein verwandtes Problem bei A. Lande, diese Zeitschr. **15**, 946, 1914.

3) Vgl. z. B. Winkelmanns Handbuch VI (Optik), S. 1078.

4) Vgl. Debye, a. a. O., S. 682 ff.

3. I_1 heiße die Intensität an der als fest angenommenen Stelle

$$\mu_1 = \frac{2\pi \sin \varphi_1}{\lambda}$$

des Opaleszenzfeldes; $I_1 - \bar{I}_1$ ist die „Intensitätsschwankung" an dieser Stelle. I_2 und $I_2 - \bar{I}_2$ seien die entsprechenden Werte an der variabel gedachten Stelle μ_2. Das Produkt $(I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2)$ kann bei völliger Unabhängigkeit der Schwankungen in 1 und 2 ebenso gut positiv wie negativ ausfallen. Sein Mittelwert, genommen über alle möglichen ξ-Konstellationen,

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} (I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2) dw \qquad (5)$$

wird dann gleich Null. Es ist zu erwarten, daß das im allgemeinen bei genügender Entfernung des 2 von 1 zutrifft.

Besteht dagegen eine Intensitätskoppelung zwischen 1 und 2, wie wir sie bei hinreichend benachbarten Stellen voraussehen, so bedingt eine positive Schwankung $I_1 - \bar{I}_1$ mit mehr oder minder großer Wahrscheinlichkeit auch ein positives $I_2 - \bar{I}_2$, und ein negatives $I_1 - \bar{I}_1$ ein negatives $I_2 - \bar{I}_2$. Dann nimmt K einen positiven Wert an und wird vermutlich wachsen, je mehr 2 an 1 heranrückt. Lassen wir gar 2 mit 1 zusammenfallen, so erreicht K als den der denkbar engsten Koppelung entsprechenden Wert den des mittleren Schwankungsquadrats an der Stelle 1. Wir untersuchen im folgenden den Wert von K in Abhängigkeit von dem Winkelabstand $\Delta\varphi$ zwischen 1 und 2. „Gekoppelten Winkelbereich" nennen wir den Bereich um 1, in dem K Werte annimmt, die gegen das mittlere Schwankungsquadrat in 1 nicht zu vernachlässigen sind.

Unter Berücksichtigung von (3) wird durch Ausmultiplizieren der Klammer in (5)

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} I_1 I_2 dw - \bar{I}_1 \bar{I}_2. \qquad (6)$$

Hierin ist $\bar{I}_1 \bar{I}_2$ aus (4) bekannt, und die Berechnung von K ist zurückgeführt auf die Auswertung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_1 I_2 dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{u}^{1..N} \sum_{m}^{1..N} e^{i\mu_1(u-m)} g\, e^{i\mu_1(\xi_u - \xi_m)} \right] \left[\sum_{u'}^{1..N} \sum_{m'}^{1..N} e^{i\mu_2(u'-m')} g\, e^{i\mu_2(\xi_{u'} - \xi_{m'})} \right] \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N e^{-h^2 \sum_{p}^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N.$$

Bei Berücksichtigung einer endlichen Spaltbreite a träte nach bekannten klassischen Formeln[1]) der Faktor $\dfrac{\sin \frac{\mu a}{2}}{\frac{\mu a}{2}}$ in I und $\bar{I}$ in der zweiten, in K in der vierten Potenz hinzu. Für alle folgenden Schlüsse ist das belanglos.

4. Das Produkt der Doppelsummen hat $N^2 \cdot N^2 = N^4$ Glieder, jedes vom Typ

$$e^{i\mu_1(u-m)} g\, e^{i\mu_2(u'-m')} g \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N e^{i\mu_1(\xi_u - \xi_m)} e^{i\mu_2(\xi_{u'} - \xi_{m'})} e^{-h^2 \sum_{p}^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N. \qquad (7)$$

Wir werten erst die hier auftretenden Integrale aus und unterscheiden zehn Typen, je nachdem n, m, n', m' alle untereinander verschieden oder z. T. gleich sind.

I. $n = m$ und gleichzeitig $n' = m'$. Das N-fache Integral vereinfacht sich zu

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \sum_{p}^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N$$

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N \left(\frac{\sqrt{\pi}}{h} \right)^N = \underline{1}.$$

II. $n = m$, $n' \neq m'$. Das Integral wird zu

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu_2(\xi_{u'} - \xi_{m'})} e^{-h^2 \sum_{p}^{1..N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N$$

und hat, vgl. Debye, a. a. O., S. 683 f., den Wert

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^N \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{h} \right)^N e^{-\frac{\mu_2^2}{4h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{4h^2}} = \underline{e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}}}.$$

III. Entsprechend wird im Falle $n \neq m$, $n' = m'$ das Integral gleich

$$\underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}}}.$$

1) Vgl. z. B. Winkelmann, a. a. O., S. 1078/72.

Alle folgenden Fälle haben das gemeinsam, daß $n \neq m$ und $n' \neq m'$ ist. Immer lassen sich die Integrale wie in II auswerten.

IV. $n \neq m$, $n' \neq m'$; aber $n = n'$ und $m = m'$.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mu_1+\mu_2)\xi_n} e^{-i(\mu_1+\mu_2)\xi_m} e^{-h^2 \sum_p^{1\ldots N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N = \underline{e^{-\frac{(\mu_1+\mu_2)^2}{2h^2}}}.$$

V. $n \neq m$, $n' \neq m'$; aber $n = m'$ und $m = n'$.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mu_1-\mu_2)\xi_n} e^{-i(\mu_1-\mu_2)\xi_m} e^{-h^2 \sum_p^{1\ldots N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N = \underline{e^{-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2h^2}}}.$$

VI. Alle Indices ungleich bis auf $n = n'$.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mu_1+\mu_2)\xi_n} e^{-i\mu_1\xi_m} e^{-i\mu_2\xi_{m'}} e^{-h^2 \sum_p^{1\ldots N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N = e^{-\frac{(\mu_1+\mu_2)^2}{4h^2}} e^{-\frac{\mu_1^2}{4h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{4h^2}}$$

$$= \underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_1\mu_2}{2h^2}}}.$$

VII. Der gleiche Wert

$$\underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_1\mu_2}{2h^2}}}$$

ergibt sich im Falle: alle Indices ungleich bis auf $m = m'$.

VIII. Alle Indices ungleich bis auf $n = m'$.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mu_1-\mu_2)\xi_n} e^{-i\mu_1\xi_m} e^{i\mu_2\xi_{n'}} e^{-h^2 \sum_p^{1\ldots N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N = \underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}} e^{\frac{\mu_1\mu_2}{2h^2}}}.$$

IX. Derselbe Wert

$$\underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}} e^{\frac{\mu_1\mu_2}{2h^2}}}$$

ergibt sich auch im Falle: alle Indices ungleich bis auf $m = n'$.

X. Alle Indices ungleich.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu_1(\xi_n-\xi_m)} e^{i\mu_2(\xi_{n'}-\xi_{m'})} e^{-h^2 \sum_p^{1\ldots N} \xi_p^2} d\xi_1 \ldots d\xi_N = \underline{e^{-\frac{\mu_1^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2^2}{2h^2}}}.$$

5. Jedes der zehn Integrale kehrt bei einer Anzahl von Gliedern wieder. Es handelt sich jetzt darum, die zehn Summen auszuwerten, die als Faktoren der zehn Integrale erscheinen. Jede Summe besteht nach (7) aus Gliedern

$$e^{i\mu_1(n-m)g} e^{i\mu_2(n'-m')g},$$

wobei zwischen den n, m, n', m' in den ersten neun Fällen gewisse Gleichungen bestehen; nur im zehnten Falle sind sie alle verschieden.

I. $n = m$, $n' = m'$. Jedes Glied der Summe wird zu 1. Da die Summe N^2 Glieder hat, ist ihr Wert

$$\underline{N^2}.$$

II. $n = m$, $n' \neq m'$. Die $N(N^2 - N)$ Glieder, die die Summe bilden, lassen sich in die Form

$$N \cdot \sum_{n'}^{1\ldots N} e^{i n' \mu_2 g} \sum_{m'}^{1\ldots N} e^{-i m' \mu_2 g}$$

zusammenfassen, wo der Strich am zweiten Summenzeichen bedeutet, daß m' nicht den Wert n' annehmen darf. Den Wert der Doppelsumme berechnet Debye, a. a. O., S. 686, Gl. (15) zu

$$\frac{\sin^2 \frac{N\mu_2 g}{2}}{\sin^2 \frac{\mu_2 g}{2}} - N,$$

oder unter Einführung der Abkürzung

$$\frac{\sin \frac{N\mu_2 g}{2}}{\sin \frac{\mu_2 g}{2}} = M_2 \qquad (8)$$

zu

$$M_2^2 - N.$$

so daß die Summe der $N(N^2-N)$ Glieder

$$\underline{N(M_2{}^2-N)}$$

wird.

III. $n \neq m$, $n' = m'$. Hier findet man entsprechend

$$\underline{N(M_1{}^2-N)}$$

mit der Abkürzung

$$\frac{\sin\frac{N\mu_1 g}{2}}{\sin\frac{\mu_1 g}{2}} = M_1. \qquad (9)$$

IV. $n \neq m$, $n' \neq m'$; aber $n = n'$, $m = m'$. Die Summe, mit der hier das Integral multipliziert ist, lautet

$$\sum_n^{1\ldots N} e^{i n(\mu_1+\mu_2)g} \sum_m^{1\ldots N} e^{-i m(\mu_1+\mu_2)g}.$$

Nach Debye, a. a. O., S. 685, Gl. (13) und (14), ist

$$\sum_m^{1\ldots N} e^{-i m(\mu_1+\mu_2)g}$$
$$= \sum_m^{1\ldots N} e^{-i m(\mu_1+\mu_2)g} - e^{-i n(\mu_1+\mu_2)g}$$
$$= M_{1+2} - e^{-i n(\mu_1+\mu_2)g}$$

mit der Abkürzung

$$\frac{\sin\frac{N(\mu_1+\mu_2)g}{2}}{\sin\frac{(\mu_1+\mu_2)g}{2}} = M_{1+2}. \qquad (10)$$

Damit wird die Doppelsumme zu

$$\sum_n^{1\ldots N} e^{i n(\mu_1+\mu_2)g}\,(M_{1+2} - e^{-i n(\mu_1+\mu_2)g})$$
$$= M_{1+2}\sum_n^{1\ldots N} e^{i n(\mu_1+\mu_2)g} - \sum_n^{1\ldots N} 1$$
$$= \underline{M_{1+2}^2 - N}.$$

V. $n \neq m$, $n' \neq m'$, aber $n = m'$ und $m = n'$. Hier ergibt die Summe entsprechend

$$\underline{M_{1-2}^2 - N}.$$

mit der Abkürzung

$$\frac{\sin\frac{N(\mu_1-\mu_2)g}{2}}{\sin\frac{(\mu_1-\mu_2)g}{2}} = M_{1-2}. \qquad (11)$$

Die fünf folgenden Summen sind umständlicher, bieten aber keine neuen Schwierigkeiten. Wir geben nur ihre Werte an.

VI. Alle Indices ungleich bis auf $n = n'$.

$$\underline{M_{1+2}(M_1M_2 - M_{1+2}) - M_2{}^2 - M_1{}^2 + 2N}.$$

VII. Derselbe Ausdruck

$$\underline{M_{1+2}(M_1M_2 - M_{1+2}) - M_2{}^2 - M_1{}^2 + 2N}$$

tritt auf, wenn alle Indices bis auf $m = m'$ ungleich sind.

VIII. Alle Indices ungleich bis auf $n = m'$.

$$\underline{M_{1-2}(M_1M_2 - M_{1-2}) - M_1{}^2 - M_2{}^2 + 2N}.$$

IX. Alle Indices ungleich bis auf $m = n'$. Es folgt der gleiche Ausdruck

$$\underline{M_{1-2}(M_1M_2 - M_{1-2}) - M_1{}^2 - M_2{}^2 + 2N}.$$

X. Alle Indices ungleich:

$$\underline{M_{1+2}^2 + M_{1-2}^2 + M_1M_2(M_1M_2 - 2M_{1+2}}$$
$$\underline{- 2M_{1-2}) - (N-4)(M_1{}^2 + M_2{}^2) + N(N-6)}.$$

6. Den Wert von

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} I_1 I_2 dw - \bar{I}_1\bar{I}_2,$$

Gl. (6), finden wir nunmehr, indem wir jeden der zehn in Nr. 4 stark unterstrichenen Integralwerte mit dem in Nr. 5 unter der gleichen römischen Ziffer stehenden stark unterstrichenen Summenwerte multiplizieren, alles addieren und davon $\bar{I}_1\bar{I}_2$ abziehen, welch letzteres nach (4) mit den Abkürzungen (8) und (9) die Form

$$\bar{I}_1\bar{I}_2 = [e^{-\frac{\mu_1{}^2}{2h^2}}(M_1{}^2 - N) + N]$$
$$[e^{-\frac{\mu_2{}^2}{2h^2}}(M_2{}^2 - N) + N]$$

annimmt. Als Maß der Intensitätskoppelung ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
K = {} & e^{-\frac{\mu_1{}^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2{}^2}{2h^2}} \{M_{1+2}^2 + M_{1-2}^2 - 2M_1M_2M_{1+2} - 2M_1M_2M_{1-2} + 4M_1{}^2 + 4M_2{}^2 - 6N\} \\
& + e^{-\frac{\mu_1{}^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2{}^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_1\mu_2}{h^2}} \{2M_1M_2M_{1+2} - 2M_{1+2}^2 - 2M_1{}^2 - 2M_2{}^2 + 4N\} \\
& + e^{-\frac{\mu_1{}^2}{2h^2}} e^{-\frac{\mu_2{}^2}{2h^2}} e^{+\frac{\mu_1\mu_2}{h^2}} \{2M_1M_2M_{1-2} - 2M_{1-2}^2 - 2M_1{}^2 - 2M_2{}^2 + 4N\} \\
& + e^{-\frac{(\mu_1+\mu_2)^2}{2h^2}} \{M_{1+2}^2 - N\} \\
& + e^{-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{2h^2}} \{M_{1-2}^2 - N\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Lassen wir die Stellen 1 und 2 zusammenfallen, so folgt hieraus ein Ausdruck des mittleren Schwankungsquadrates, der sich von dem anderwärts[1]) näherungsweise nach dem Markoffschen Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung[2]) abgeleiteten dadurch unterscheidet, daß dort je die drei letzten Glieder in den drei ersten geschweiften Klammern von (12) und je das letzte Glied in der vierten und fünften geschweiften Klammer von (12) fehlen. Diese elf Glieder sind in der Tat, wie man sich überzeugen kann, zumal in dem praktisch wichtigen Falle der großen N zu vernachlässigen, weil sie N in einer niedrigeren Potenz enthalten. Das gilt aber nur in dem Sonderfalle, wo 2 nach 1 rückt, nicht für unser Problem.

7. Hier läßt sich K in anderer Weise vereinfachen. Der experimentelle Befund an einem absichtlich fehlerhaft geritzten Gitter nämlich läßt ebenso wie das oben zitierte Landésche Beispiel voraussehen, daß es sich um gekoppelte Winkelbereiche von so kleiner Ausdehnung handeln wird, daß wir zunächst in den e-Faktoren von K

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$
$$\mu_1 - \mu_2 = 0$$

setzen können. Damit treten als Faktoren der fünf geschweiften Klammern die 2., 3., 1., 4. und 0. Potenz von $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$ auf.

In den Klammern ist N beizubehalten ebenso wie die Glieder, die in der ersten oder zweiten Potenz

$$M_{1-2} = \frac{\sin\frac{N(\mu_1-\mu_2)g}{2}}{\sin\frac{(\mu_1-\mu_2)g}{2}}$$

enthalten, einen Quotienten zweier kleiner Zahlen, der im Grenzfalle $\mu_1 = \mu_2$ zu N wird. Zu vernachlässigen sind dagegen bis auf die Gebiete in der Nachbarschaft der Hauptmaxima

$$M_1^2 = M_2^2 = M_1 M_2 = \frac{\sin^2\frac{N\mu g}{2}}{\sin^2\frac{\mu g}{2}},$$

wie man aus dem Intensitätsverlauf im klassischen Gitter-Beugungsbilde weiß, den dieser Bruch im wesentlichen darstellt. Zu vernachlässigen ist im allgemeinen auch

$$M_{1+2} = \frac{\sin\frac{N(\mu_1+\mu_2)g}{2}}{\sin\frac{(\mu_1+\mu_2)g}{2}}$$

und sein Quadrat; es sei denn, daß

$$\frac{(\mu_1+\mu_2)g}{2} = \pi,$$

oder ein ganzzahliges Vielfaches davon wird, ein Spezialfall, den wir in Nr. 9 behandeln.

Somit vereinfacht sich K (wenn wir noch

$$\mu_2 - \mu_1 = \delta \qquad (13)$$

setzen) zu

$$K = \left(e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)^2 \left\{ \frac{\sin^2\frac{N\delta g}{2}}{\sin^2\frac{\delta g}{2}} - 2\,\frac{\sin^2\frac{N\mu g}{2}}{\sin^2\frac{\mu g}{2}}\,\frac{\sin\frac{N\delta g}{2}}{\sin\frac{\delta g}{2}} - 6N \right\}$$
$$+ \left(e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)^3 \cdot 4N + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \left\{ 2\,\frac{\sin^2\frac{N\mu g}{2}}{\sin^2\frac{\mu g}{2}}\,\frac{\sin\frac{N\delta g}{2}}{\sin\frac{\delta g}{2}} + 4N \right\}$$
$$- \left(e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)^4 \cdot N + \frac{\sin^2\frac{N\delta g}{2}}{\sin^2\frac{\delta g}{2}} - N,$$

was wir in

$$K = \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)^2 \frac{\sin^2\frac{N\delta g}{2}}{\sin^2\frac{\delta g}{2}} + 2e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)\frac{\sin^2\frac{N\mu g}{2}}{\sin^2\frac{\mu g}{2}}\,\frac{\sin\frac{N\delta g}{2}}{\sin\frac{\delta g}{2}} - N\left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right)^2 \qquad (14)$$

zusammenziehen.

1) E. Buchwald, diese Zeitschr. **26**, 672, 1925, Gl. (4). — 2) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, dt. v. H. Liebmann. Leipzig u. Berlin 1912, S. 173 ff.

Wie auch die drei Summanden mit Beugungswinkel φ, Präzision h und Strichzahl N wechseln mögen: entscheidend bleibt immer der erste Term

$$\frac{\sin^2 \frac{N\delta g}{2}}{\sin^2 \frac{\delta g}{2}},$$

mit seinem Faktor N^2 bei $\delta = 0$ nach beiden Seiten so abfällt, wie die Intensität im Hauptmaximum des klassischen Beugungsbildes und der für

$$\frac{N\delta g}{2} = \pi$$

zum erstenmal den Wert Null annimmt. Der zweite Term verändert nur wenig die Form dieses Abfalls; der dritte ist ein im allgemeinen unwichtiges von δ unabhängiges Zusatzglied.

Die Nachbarstelle von 1, die bereits wesentlich unabhängige Intensität hat, ist also durch

$$\delta = \mu_2 - \mu_1 = \frac{2\pi}{Ng}$$

bestimmt, d. h. mit (1) und

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = \cos \varphi \, \Delta\varphi$$

durch den Winkelabstand

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{Ng \cos \varphi}.$$

Nun ist $\frac{\lambda}{g \cos \varphi}$ (in der üblichen Vernachlässigung $\frac{\lambda}{g}$) der Winkelabstand zwischen den Hauptmaximis, $\frac{\lambda}{Ng \cos \varphi}$ der Abstand zweier Nebenminima. Unser Ergebnis läßt sich also in die anschauliche Form kleiden: zwei Nachbarstellen im Beugungsbilde haben unabhängige Intensität, wenn ihr Abstand gleich dem zweier Nebenminima ist. Oder: die Größe eines gekoppelten Bereichs ist gleich dem doppelten Abstande zweier Nebenminima. Das ist mithin auch die Breite eines Gittergeistes; es ist nach der klassischen Beugungstheorie auch die Breite des Beugungsbildes[1]).

Genau genommen besteht allein durch das Glied $\frac{\sin^2 \frac{N\delta g}{2}}{\sin^2 \frac{\delta g}{2}}$ eine Intensitätskoppelung durch das ganze Beugungsbild, denn nach seinem ersten Nullwerte und zwischen allen folgenden steigt es wieder an, wenn auch im allgemeinen wenig. (Über sein erneutes Ansteigen zum Werte N^2 siehe Nr. 9.)

1) Vgl. z. B. P. Drude, Lehrbuch d. Optik, Leipzig 1912, S. 215.

8. Als Zahlenbeispiel wählen wir das auch in der genannten Annalenarbeit zugrunde gelegte:

$$N = 10^4$$
$$g = 2 \cdot 10^{-4}$$
$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$$

und als mittleren Fehler der Gitterstrichlage

$$1 \cdot 10^{-5},$$

d. h. $\frac{1}{20}$ der Gitterkonstante, was zu einem

$$h = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m}} = 7{,}07 \cdot 10^4$$

führt[1]).

Wir berechnen K in der Umgegend von $\varphi = 4^0$. (Das erste Hauptmaximum liegt bei $\varphi = 14\frac{1}{2}{}^0$.) Hier ist

$$e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} = 0{,}992;$$

$\sin^2 \frac{N\mu g}{2}$ schwankt zwischen 0 und 1,7 und $\sin^2 \frac{\mu g}{2}$ möge durch seinen Mittelwert 0,85 ersetzt werden. Dann wird nach (14)

$$K = 6{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{\sin^2 \frac{N\delta g}{2}}{\sin^2 \frac{\delta g}{2}} + 0{,}0135 \frac{\sin \frac{N\delta g}{2}}{\sin \frac{\delta g}{2}} - 4{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

Fig. 1 gibt die graphische Darstellung für einen Bereich des $\frac{N\delta g}{2}$ von -360^0 bis $+360^0$, das ist für einen φ-Bereich von 4 mal 5,2″. Für $\Delta\varphi = 5{,}2''$, was dem Abstande benachbarter Beugungsminima entspricht, ist die Intensitätskoppelung erstmalig verschwunden[2]), um weiterhin im allgemeinen geringfügig zu bleiben.

9. Dies gilt jedoch nicht mehr für ein δ derart, daß

$$\frac{\delta g}{2} = \pm n\pi \quad (n \text{ ganze Zahl}) \qquad (15)$$

wird. Dann nimmt K wiederum bedeutende Werte an, wobei es von untergeordnetem Ein-

1) Vgl. z. B. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig u. Berlin 1908. S. 269.

2) Genauer: K ist infolge des letzten Gliedes negativ geworden, d. h. an dieser Stelle herrscht mit überwiegender Wahrscheinlichkeit eine negative Schwankung, wenn die an der Stelle $\delta = 0$ positiv ist.

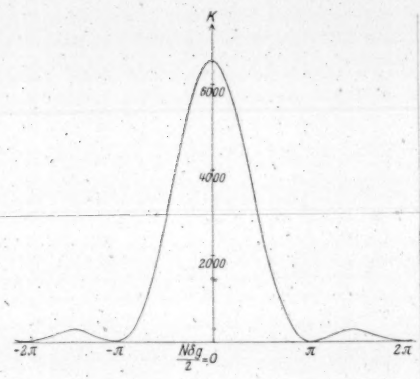


Fig. 1.

fluß ist, daß seine in (14) gegebene vereinfachte Form nicht mehr gilt. Weit abstehende Stellen im Beugungsbilde erscheinen so miteinander gekoppelt. Nach (13) und (1) folgen aus (15) als entsprechende Winkelzuwächse

$$\varphi_2' - \varphi_1 = \pm n \frac{\lambda}{g \cos \varphi}.$$

Das heißt: eine Stelle ist mit allen gekoppelt, wo die Ordnung der Interferenz — darunter eine im allgemeinen nicht ganze

Fig. 2.

Zahl verstanden — um 1, 2, 3 ... größer oder kleiner ist. Wenn die Gitterstriche also zufällig so liegen, daß eine bestimmte Stelle 1 (Fig. 2) zwischen dem Mittelbilde M und dem ersten Hauptmaximum I eine große positive Schwankung aufweist, so kehrt eine solche an den homologen Stellen 2_1 zwischen erstem und zweitem, 2_2 zwischen zweitem und drittem Hauptmaximum usw. wieder, ebenso bei 2_{-1} zwischen dem (— 1)-ten Maximum — I und M usw.

Es gibt aber noch eine weitere Reihe von entfernten Stellen, die mit der Stelle 1 gekoppelt sind: nach Nr. 7 nimmt K nämlich auch hohe Werte an für alle Intervalle 1, 2, wo $\frac{(\mu_1 + \mu_2) g}{2} = \pm n\pi$ (n ganze Zahl einschl. Null), d. h. für die

$$\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = \pm n \frac{\lambda}{g} \qquad (16)$$

ist. Mit der Stelle 1 zwischen Mittelbild und erstem Hauptmaximum ist mithin die zu ihr in diesem Winkelbereich symmetrische $2_1'$ gekoppelt und deren homologe in allen positiven und negativen Ordnungen $2_2', 2_3', \ldots, 2_0', 2_{-1}' \ldots$ in Fig. 2.

Die durch unperiodische Teilungsfehler entstehenden Gittergeister liegen also in dem Bereich von einem Hauptmaximum bis halbwegs zum benachbarten nach dem Zufall verteilt. Durch ihre Verteilung in diesem Gebiet aber ist die Verteilung im ganzen übrigen Beugungsbilde bestimmt.

10. Das Vorhandensein beider Arten der Koppelung mit entfernten Stellen übersieht man geometrisch nach der Cornuschen Methode, die in ihrer Anwendung auf das Beugungsgitter oft nach Kimball[1]) zitiert wird, aber auf Sagnac[2]) u. a. zurückgeht, und die Sparrow[3]) auf unvollkommene Gitter angewandt hat. Man hat hiernach bei einem vollkommenen Gitter ein Vektorpolygon von N gleichen Seiten l, der von einem Einzelspalt herrührenden Amplitude, in einen Kreis vom Radius r einzutragen und findet die resultierende Amplitude als Verbindungsstrecke des Polygonanfangs und -endes. r ist vom Beugungswinkel φ abhängig und pendelt zwischen dem Werte ∞ in den Hauptmaximis und dem Werte $\frac{l}{2}$ mitten dazwischen. Für die gekoppelten Stellen der Figur 2 hat r den gleichen Wert.

Beim Gitter mit unperiodischen Teilungsfehlern tritt an Stelle des „richtigen" Vektorpolygons $ABC \ldots$ (Fig. 3) ein „fehlerhaftes" $A'B'C' \ldots$, dessen Seiten, gleichfalls von der Länge l, mit den „richtigen" Seiten kleine Phasenwinkel einschließen, die wir wie Sparrow mit $q\varepsilon_1, q\varepsilon_2 \ldots$ bezeichnen; denn sie sind einerseits der Ordnung q der Interferenz proportional, anderseits einer kleinen, nach dem Zufall verteilten Größe

$$\varepsilon_p = 2\pi \cdot \frac{\xi_p}{g},$$

die die Abweichung des p-ten Spaltes von seiner richtigen Lage kennzeichnet.

1) A. L. Kimball, Phil. Mag. **6**, 30, 1903.
2) M. S. Sagnac, Journ. d. phys. (3) **7**, 28, 1898; (4) **3**, 211, 1904.
3) C. M. Sparrow, Astrophys. Journ. **49**, 65, 1919. Unperiodische Teilungsfehler werden nur kurz, Intensitätsschwankungen im Opaleszenzfelde werden nicht behandelt.

Zerlegen wir die fehlerhaften Vektoren AB', $B'C'\ldots$ in ihre Komponenten parallel und senkrecht zu ihren richtigen Richtungen AB, $BC\ldots$, so gibt die Reihe der ersten Komponenten bei der Kleinheit der Fehler im wesentlichen den Kurvenzug des fehlerfreien Gitters. Die senkrechten Komponenten aber, vertreten in Fig. 3 durch die beiden dick ausgezogenen Pfeile, geben zusammengefaßt die Opaleszenzamplitude.

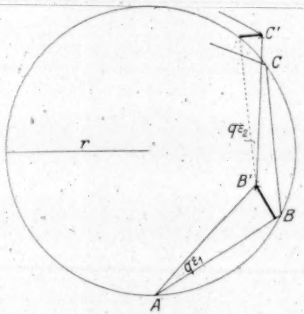


Fig. 3.

Setzen sich an einer Stelle 1 des Beugungsbilds diese Pfeile zu einer bemerkenswert großen Amplitude, einem Gittergeist, zusammen, so gilt das für alle gekoppelten Stellen der Fig. 2, weil an allen diesen Stellen die Konstruktion am selben Kreise durchzuführen ist, mit den gleichen Pfeilrichtungen also und nur mit einer im Verhältnis $\frac{q_2}{q_1}$ veränderten Pfeillänge. Eine beliebige Stelle des Beugungsbilds erscheint deswegen nicht an die Stelle 1 gekoppelt, weil das veränderte r des Konstruktionskreises auch die Pfeilrichtungen verändert.

Zusammenfassung. Ein Gitter mit unsystematischen Teilungsfehlern liefert im Beugungsbild einen granulierten Untergrund, das Opaleszenzfeld, dessen hellste Stellen als unperiodische Gittergeister hervortreten. Jede Stelle des Opaleszenzfelds ist hinsichtlich ihrer Intensität mit allen übrigen gekoppelt. Merklich ist die Koppelung aber nur in einem Nachbargebiete vom doppelten Winkelabstand zweier Nebenminima und mit gewissen symmetrisch angeordneten entfernten Stellen. Das erstere Ergebnis bestimmt die Breite eines der unperiodischen Geister, das letztere deren regelmäßige Wiederkehr im Beugungsbilde.

Danzig, Technische Hochschule.

(Eingegangen 14. April 1926.)

Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energiespeichern.

Von Erich Friedländer.

Übersicht.

In Heft 2 dieser Zeitschrift behandelt H. Barkhausen die Frage, warum sich die für den Lichtbogen gültigen Stabilitätsbedingungen bei den Elektronenröhren umkehren. Im Zusammenhang mit diesen Erörterungen werden die Stabilitätsbedingungen der Systeme mit einem und zwei elektromagnetischen Energiespeichern in einer neuen Betrachtungsweise vorgeführt und gezeigt, wie man diese besonders leicht übersehen kann. Zugleich wird der Einfluß der Berücksichtigung sehr kleiner Zusatzspeicher auf die Stabilitätsbedingungen gegenüber ihrer Vernachlässigung beleuchtet. Schließlich wird gezeigt, daß die Entscheidung über die richtige Schaltungskombination, mit welcher ein Steuerorgan zur Schwingungserzeugung geeignet ist, stets auch von der vollständigen Form seiner Strom-Spannungscharakteristik abhängt. Elektronenröhre und Lichtbogen weisen gerade auch darin wesentliche Unterschiede auf, die ihr entgegengesetztes Verhalten hinsichtlich der Schwingungserzeugung auch ohne Berücksichtigung von Eigenkapazität bzw. Eigeninduktivität schon erklären.

Die Frage nach den Stabilitätsbedingungen elektrischer Systeme ist schon häufig[1]) angeschnitten worden, jedoch ist ein Kriterium, das nicht von Fall zu Fall erst auf seine Gültigkeit hin untersucht werden muß, meines Wissens bisher noch nicht klar formuliert worden. Wenn Stabilitätskriterien wie das Kaufmannsche erst nach Bedarf umgekehrt werden müssen, so ist das doch nur ein Zeichen dafür, daß es gar keine „Stabilitätskriterien" sondern eben nur spezielle Bedingungen sind. Und doch ist es gar nicht schwer, wenigstens für Systeme mit nur einem einzigen elektromagnetischen Energiespeicher[2]), ein eindeutiges Kriterium anzugeben.

Stellen wir uns z. B. gemäß Fig. 1 eine Drossel L vor, die mit einem ganz beliebigen Widerstandssystem verkettet sei. Wir wissen, daß wenn man in ein solches System an irgendeiner Stelle eine konstante EMK einfügt und diese dann z. B. kurzschließt, daß sich dann

1) Über die einschlägige Literatur vgl. den in der Übersicht angezogenen Aufsatz: H. Barkhausen, Warum kehren sich die für den Lichtbogen gültigen Stabilitätsbedingungen bei den Elektronenröhren um? (Physik. Zeitschr. **27**, 43, 1926).

2) Es ist dabei zu beachten, daß auch mehrere unmittelbar parallel oder in Reihe geschaltete Kapazitäten oder Induktivitäten sich wie ein einziger, konzentriert anzunehmender Speicher verhalten.

Ausgleichsvorgänge abspielen, die nach einer Exponentialfunktion verlaufen müssen, und daß diese im Exponenten die Zeitkonstante des Energiespeichers mit seinen Schließungswiderständen enthält. Für den in Fig. 1 gezeichneten

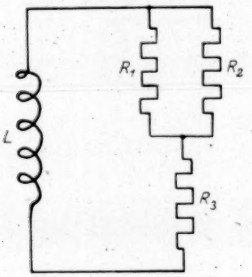


Fig. 1.

Fall ist diese Zeitkonstante gegeben durch die Größe $T = \frac{L}{R_{res}}$, wobei der resultierende Widerstand hier $R_{res} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$ wird. Die Exponentialfunktion der Ausgleichsströme bekommt dann bekanntlich die Form $i = J \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$. Ein System ist aber nur dann stabil, wenn die nach einem Schaltvorgang oder einer beliebigen anderen noch so kleinen Gleichgewichtsstörung auftretenden Ausgleichsströme mit wachsender Zeit abklingen, d. h. also nur dann, wenn die resultierende Zeitkonstante des Energiespeichers positiv ist.

Diese Überlegung gestattet, alle Systeme mit nur einem Energiespeicher sofort hinsichtlich ihrer Stabilitätsbedingungen zu übersehen. Wir betrachten zum Beispiel den Lichtbogen. Nehmen wir zunächst an, der Lichtbogen selbst besitze keine Eigenschaft, die mit der einer Induktivität oder Kapazität zu vergleichen wäre. — Barkhausen hat nachgewiesen, daß das tatsächlich nicht richtig ist. Wir kommen auf die daraus folgenden Konsequenzen später noch zurück. — Dann ist die Gleichgewichtsbedingung bekanntlich nur formulierbar[1]), wenn der Schließungskreis des Lichtbogens irgendeinen anderen Energiespeicher enthält, denn nur dann kann die Zeitkonstante des Systems überhaupt einen von Null abweichenden Wert annehmen. Wir setzen zunächst den Fall einer Reihenschaltung des Lichtbogens mit einer Induktivität L und einem Ohmschen Widerstand R an einer konstanten Arbeitsspannung E voraus. Der Kreisstrom sei i. Fig. 2 zeigt in e die Charakteristik des Lichtbogens. $E - i \cdot R$ ist die Widerstandsgerade. Dann folgt aus $E = i \cdot R + e + L \cdot \frac{di}{dt}$ bekanntlich, daß P_1 und P_2 Gleichgewichtslagen des Systems darstellen, da in ihnen $L \cdot \frac{di}{dt} = 0$ werden muß. Setzen wir für e in der Nähe einer Gleichgewichtslage die Gleichung einer Geraden in der Form $e = e_0 + \frac{de}{di} i$ ein, so folgt aus $(E - e_0) = i\left(R + \frac{de}{di}\right)$ für diese Gleichgewichtslage, daß der Lichtbogen hier ersetzt werden kann durch eine konstante EMK e_0, der ein Ohmscher Widerstand von der Größe $\frac{de}{di} = Q$ vorgeschaltet ist. Q ist der „negative Widerstand" des Lichtbogens. Dieser kann nun, solange es sich nur um die Nachbarschaft einer Gleichgewichtslage handelt, für die Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse eingesetzt werden wie jeder andere Widerstand im Schließungskreise der Fig. 1. Im vorliegenden Fall ergibt sich damit ohne weiteres die resultierende Zeitkonstante $T = \frac{L}{R + Q}$ nur dann positiv, wenn $R + Q > 0$, d. h. wenn $R > -\frac{de}{di}$ wird. Dieser stabile Fall entspricht dem Punkt P_2 in Fig. 2. Für P_1 dagegen ist $R < -\frac{de}{di}$, dieser Punkt wird also labil.

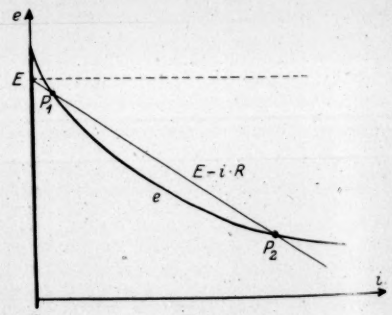


Fig. 2.

Wie gestalten sich nun die Verhältnisse, wenn wir entsprechend Fig. 3 demselben — hypothetischen — Lichtbogen aus Fig. 2 an Stelle

1) Vgl. z. B. Busch, „Stabilität, Labilität und Pendelungen in der Elektrotechnik". (Leipzig 1913), S. 9.

der Vordrossel eine Nebenkapazität C zuschalten? Man übersieht sofort, daß der resultierende Schließungswiderstand der Kapazität sich jetzt aus einer Parallelschaltung von Q und R zusammensetzt. Die Zeitkonstante heißt diesmal:

$$T = R_{res} \cdot C = \frac{R \cdot Q}{R + Q} \cdot C.$$

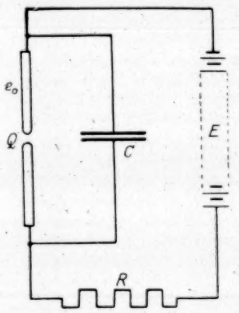


Fig. 3.

Daraus folgt, daß diesmal die Stabilitätsbedingung umgekehrt herauskommen muß. Denn da Q sowohl in P_1 wie in P_2 (Fig. 2) negativ ist, ist der Zähler des Widerstandsbruches jedenfalls negativ, der Bruch selbst also nur positiv, wenn auch der Nenner negativ wird. Dieser ist aber identisch mit dem Schließungswiderstand der Induktivität im ersten Fall und damit ist die Notwendigkeit, daß P_1 und P_2 ihre Stabilitätsverhältnisse gegenüber Kapazität bzw. Drossel miteinander vertauschen müssen, bereits bewiesen.

Schließen wir nun ein beliebiges Steuerorgan nur durch rein Ohmsche Widerstände, so wird für die Stabilitätsbedingungen entscheidend sein, ob sich das Organ wesentlich so verhält, als wäre ihm eine Induktivität vor- oder eine Kapazität nebengeschaltet. Barkhausen hat auf das charakteristisch unterschiedliche Verhalten von Lichtbogen und Elektronenröhre in dieser Hinsicht schon hingewiesen. Man erkennt aber, daß man allgemein zur Beurteilung der Stabilität einer Gleichgewichtslage nicht den Schließungswiderstand des Organes mit fallender Charakteristik sondern den des Energiespeichers suchen muß. Man kommt sonst nur bei wesentlich induktivem Eigenverhalten des Steuerorganes zu richtigen Ergebnissen[1]).

[1]) In dieser Hinsicht scheint auch eine Ergänzung des § 25 in Barkhausens „Problem der Schwingungserzeugung" (Leipzig 1907), S. 53—56, erforderlich.

Auch bei Systemen mit zwei Energiespeichern kann man die Stabilitätsbedingungen in entsprechender Weise angeben wie beim Einspeichersystem.

Wir unterscheiden im folgenden zwei Arten von Schließungswiderständen bzw. Zeitkonstanten eines Energiespeichers im Zweispeichersystem, eine Gleichstromzeitkonstante (T^-) entsprechend dem Gleichstrom-Schließungswiderstand (Kondensatorwiderstand $= \infty$, Drosselwiderstand $= 0$) und eine Stoßstromzeitkonstante (T^+) entsprechend dem Widerstand gegen sprunghafte Änderungen (Kondensatorwiderstand $= 0$, Drosselwiderstand $= \infty$). Damit lauten die Sätze[1]):

Es werde die Differentialgleichung der Ausgleichsvorgänge eines Systems mit zwei Energiespeichern in der Form aufgestellt, daß der Koeffizient des zweiten Differentialquotienten nach der Zeit gleich 1 ist. Dann ist der Koeffizient des ersten Differentialquotienten nach der Zeit gleich der Summe der reziproken Stoßstromzeitkonstanten. Der Koeffizient der abhängigen Variablen selbst ist gleich dem reziproken Produkt der Stoßstromzeitkonstanten des beliebigen einen Speichers mal der Gleichstromzeitkonstanten des anderen.

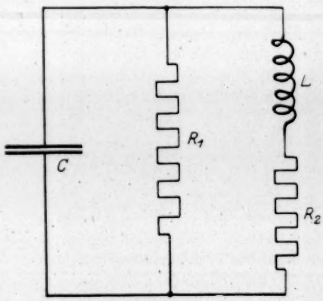


Fig. 4.

Diese Sätze mögen an demselben Beispiel erläutert werden, das wir im Barkhausenschen Aufsatz behandelt finden und dessen Schaltbild in Fig. 4 wiedergegeben ist. Die Differentialgleichung der Ausgleichsströme hat die Form:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 \cdot i + 0.$$

[1]) Herr Obering. Rinck zeigte mir, daß sich für ganz beliebige Zweispeichersysteme der Beweis für die Allgemeingültigkeit dieser Sätze streng führen läßt.

Darin ist a_1 die Summe der reziproken Stoßstromzeitkonstanten.

1. Drossel. Schließungswiderstand bei kurzgeschlossenem Kondensator ist R_2, die Stoßstromzeitkonstante ist demnach $T_D' = \frac{L}{R_2}$.

2. Kondensator. Schließungswiderstand bei unterbrochener Drossel ist R_1, die Stoßstromzeitkonstante also $T_K' = C \cdot R_1$.

Daraus

$$a_1 = \frac{1}{T_D'} + \frac{1}{T_K'} = \frac{R_2}{L} + \frac{1}{C \cdot R_1}.$$

a_0 ist das Produkt aus

$$\frac{1}{T_D'} \cdot \frac{1}{T_K'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{T_D^-} \cdot \frac{1}{T_K^-}.$$

T_K^- ergibt sich zu $C \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, T_D' war $\frac{L}{R_2}$, folglich

$$a_0 = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{LC}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der üblichen Ableitung.

Ein besonders anschauliches Bild gibt diese Form der Sätze von Dämpfung und Eigenfrequenz des Systems. Die Bedingung der „Stabilität gegen Schwingungen" (nach Barkhausen) ist erfüllt, wenn $\frac{1}{T_K'} + \frac{1}{T_D^-} > 0$, die der „Gleichstromstabilität", wenn $T_K' \cdot T_D^- = T_K^- \cdot T_D' > 0$ ist. Zugleich folgt für den Fall der ungedämpften Schwingung, es muß sein: $T_K' + T_D' = 0$ oder auch $T_K^- + T_D^- = 0$. Dann wird die Eigenfrequenz des Systems

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{T_K'} \cdot \frac{1}{T_D^-}} = \sqrt{\frac{1}{T_K^-} \cdot \frac{1}{T_D'}}.$$

Zur Beurteilung des Einflusses eines zu einem Einspeichersystem hinzukommenden zweiten Speichers auf die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist die nachfolgende Form übersichtlicher. Schreibt man die Differentialgleichung der Ausgleichsströme:

$$\beta_2 \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \beta_1 \frac{di}{dt} + i = 0,$$

so wird

$$\beta_2 = T_D' \cdot T_K', \quad \beta_1 = T_D^- + T_K^-,$$

für das obige Beispiel also

$$\frac{L \cdot C}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1 + R_2} + C \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot \frac{di}{dt} + i = 0.$$

In allen diesen Fällen sind die Stabilitätsbedingungen nur erfüllt, wenn alle Koeffizienten (a_0, a_1 bzw. β_1, β_2) positiv sind. Es ist hier interessant zu sehen, daß im Koeffizienten β_1 stets der Speicher mit der größeren Zeitkonstante, meist also auch der größere von beiden Speichern über das Vorzeichen entscheidet. Ist ein System ohne einen zweiten kleinen Speicher also labil, so kann der hinzukommende überhaupt nur dann die Labilität stören, wenn er so groß ist, daß seine Gleichstromzeitkonstante größer wird als die des bereits vorhandenen. Andererseits erkennt man aus der Form von β_2, daß ein winziger Speicher doch in der Lage ist, die Stabilität eines Systems zu stören, daß also jede Vernachlässigung noch so kleiner Speicher verhängnisvoll sein kann, wenn es auf die Kenntnis der Bedingungen für Stabilität ankommt[1]. Auch dies ist wesentlich entscheidend für den eigentümlich bedeutenden Einfluß der kleinen Eigenspeicher unserer Steuerorgane.

Die Stabilitätsbedingungen kann man aber nicht allein für die Verschiedenheit der Organe in ihrem Verhalten gegenüber Schwingungen verantwortlich machen. Der Verfasser hat schon an anderer Stelle[2]) ausführlich gezeigt, daß in jedem Falle, wo eine einzige nur mögliche oder erreichbare Gleichgewichtslage eines Systems gestört wird, periodische Vorgänge eintreten müssen, ganz gleich ob das System zu Eigenschwingungen fähig ist oder nicht. Das gilt für alle Systeme einschließlich der Einspeichersysteme. Demnach kommen Schwingungen allgemein ebensogut zustande, wenn die „Gleichstromstabilität" gestört ist, als wenn die Bedingung für „Stabilität gegen Schwingungen" in einer Gleichgewichtslage nicht erfüllt wird. Wie sich die Schwingungen ausbilden und ob sie praktisch brauchbar sind, d. h. ob sie stabil und einigermaßen sinusförmig und mit nahezu konstanter Frequenz von einem Steuerorgan erzeugt werden können, darüber entscheidet die Form seiner Strom-Spannungscharakteristik. Vor allem kann man bekanntlich aus einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, folglich auch aus den Stabilitätsbedingungen etwaiger Gleichgewichtslagen nicht beurteilen, ob ein sich einstellender Schwingungszustand stabil wird oder nicht. Denn ein konstantes Dämpfungs-

1) Vgl. hierzu auch den Aufsatz von W. Dällenbach (Physik. Zeitschr. **27**, 101, 1926), der außer der Induktivität auch noch kapazitive Einflüsse in einer Entladungsstrecke neben einem äußeren Speicher berücksichtigt und so zu weiteren Einschränkungen der erzielbaren stabilen Gleichgewichtslagen kommt.

2) Friedländer, Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren. Diss. Berlin 1926, vgl. auch Fachberichte auf der Jahresversammlung des VDE 1925 in Danzig. (Veröffentlichungen erscheinen im Archiv f. Elektrotechnik.)

glied $-a_1$ in unserer Differentialgleichung der Schwingungen — kann nur auf labil anwachsende Schwingungsamplitude, indifferentes Schwingungsgleichgewicht oder zur stabilen Gleichgewichtslage auspendelnde Schwingungen hindeuten. Stabile Schwingungen sind stets an das Vorhandensein einer gekrümmten Widerstandscharakteristik, d. h. an ein mit der Amplitude veränderliches Dämpfungsglied gebunden. Man kann die von Barkhausen[1]) für den Röhrensender speziell angegebenen Bedingungen für Stabilität der erzeugten Schwingungen in ganz allgemeiner Form auch so aussprechen:

Die ungedämpften harmonischen Schwingungen der Zweispeichersysteme werden nur dann stabil, wenn das (aus der Summe der reziproken Stoßstromzeitkonstanten bestimmte) Dämpfungsglied mit wachsender Amplitude „im Mittel" abnimmt und null werden kann. Je nachdem wie groß die Amplitude dazu werden muß, unterscheiden wir dann bekanntlich Schwingungen erster, zweiter oder dritter Art[2]).

Diese grundsätzliche Bedingung macht allein aus der Charakteristik eines Steuerorganes eine prinzipielle Entscheidung darüber möglich, in welcher Schaltanordnung des Schwingungskreises ein solches Organ in der Lage ist, stabile, brauchbare Schwingungen zu erzeugen. Hier finden wir aber einen von Eigenkapazitäten und Eigeninduktivitäten ganz unabhängigen grundlegenden Unterschied zwischen Lichtbogen und Dynatron als Wechselstromerzeuger.

Betrachten wir zunächst noch einmal die Lichtbogencharakteristik in Fig. 2. Man kann sich vorstellen, daß bei Schwingungsvorgängen, die sich im Bereich zwischen P_1 und P_2 abspielen mögen, die mittlere Neigung der Charakteristik sich nur wenig ändern wird. Sobald wir aber sehr große Stromschwankungen vor uns haben, wird unter allen Umständen die mittlere Neigung der Charakteristik mit wachsender Amplitude nur kleiner werden können. Die Folgerung daraus lautet, daß der Lichtbogen nur dann stabile Schwingungen mit großer Amplitude erregen kann, wenn mit kleiner werdendem $Q = \left|\frac{de}{di}\right|_{\text{Mittel}}$ das Dämpfungsglied unserer Differentialgleichung zunimmt. Unter welchen Umständen das nur eintreten kann, ist sofort zu übersehen, wenn wir für einen Kreis bestehend aus Steuerorgan mit dem negativen Widerstand Q und Schwingungssystem einmal unter Parallelschaltung und einmal unter Reihenschaltung von Kapazität und Induktivität die Differentialgleichung aufstellen. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir alle äußeren Widerstände. Dann ergibt sich für die Parallelschaltung:

$$\text{(Fig. 5):}\quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{CQ}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot i = 0,$$

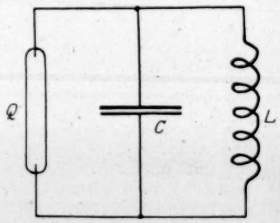


Fig. 5.

für die Reihenschaltung dagegen:

$$\text{(Fig. 6):}\quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{Q}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot i = 0.$$

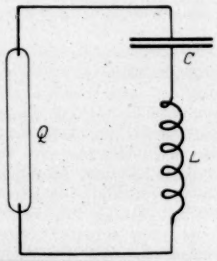


Fig. 6.

1) Barkhausen, Elektronenröhren, Bd. II, S. 94ff., 1925.

2) Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine solche Formulierung nur einen auf die qualitative Erfassung des Grundsätzlichen in den Vorgängen beschränkten Wert haben kann. Es ist an sich schon bei gekrümmter Charakteristik unmöglich, einen eintretenden Schwingungsvorgang durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten richtig zu beschreiben. Die einer annähernden Rechnung solcher Art zugrunde zu legenden Begriffe, wie „mittlere Neigung" der Charakteristik (entsprechend der „mittleren Steilheit" der Charakteristik bei Elektronenröhren) haben wohl eine anschauliche Bedeutung, man kann sie aber im allgemeinen nicht der Charakteristik entnehmen, also auch nicht mit ihnen wirklich rechnen. Dies gilt insbesondere für die Schwingungen zweiter und dritter Art. Schließlich darf daran erinnert werden, daß beim Lichtbogen speziell von der Charakteristik meist nicht gesprochen werden kann und daß bei diesem die Stabilität der Schwingungen wesentlich auch von den Abkühlungsverhältnissen an den Elektroden, somit also von der Länge der bei Schwingungen zweiter und dritter Art auftretenden Strompausen u. a. mit abhängt. Vgl. hierzu unter anderem die bekannten Arbeiten Barkhausens (Problem der Schwingungserzeugung. Leipzig, S. Hirzel. 1907) und Wagners (Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Leipzig, S. Hirzel. 1910). Unabhängig davon behalten jedoch auch die hier erwähnten Voraussetzungen für stabile Schwingungen ihre Gültigkeit.

Man sieht jetzt, daß nur bei der Reihenschaltung der Bedingung genügt wird, daß bei abnehmendem Q die Dämpfung größer wird. Hierin liegt der wohl einleuchtende Grund, warum man mit einem Lichtbogen große Schwingungsamplituden nur durch Reihenschaltung von Kapazität und Induktivität gemäß Fig. 6 erzielen kann.

Anders liegen dagegen die Verhältnisse beim Dynatron (vgl. Fig. 1 der Barkhausenschen Arbeit). Fig. 7 zeigt in e den Verlauf der

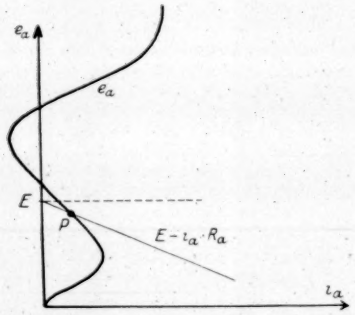


Fig. 7.

Spannung in Abhängigkeit des Stromes bei diesem. Es ist zweifelsohne nur im fallenden Teil der Charakteristik, also etwa um den Punkt P herum möglich, stabile Schwingungen zu erzeugen. Man sieht, daß aber die mittlere Neigung Q mit wachsender Amplitude zunimmt. Damit ist auch schon bewiesen, daß stabile Schwingungen mit großer Amplitude beim Dynatron nur nach der Schaltung der Fig. 5 entsprechend der zugehörigen Differentialgleichung, bei welcher Q im Nenner des Dämpfungsgliedes steht, möglich sind. So erklärt sich das unterschiedliche Verhalten von Lichtbogen und Dynatron als Schwingungserzeuger auch ohne Berücksichtigung ihrer Eigenspeicher.

Dagegen finden wir die von Barkhausen angegebene Begründung der Unterschiede aus der Vertauschung von Ursache und Wirkung auch in den Charakteristiken wieder bestätigt, wenn wir uns klarmachen, daß beim Lichtbogen der Strom eine willkürliche Veränderliche (Ursache) darstellt, der wir theoretisch beliebige Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ erteilen können, während die Spannung vom Strom abhängig (Wirkung) und stets endlich begrenzt bleibt. Daraus folgt schon, daß der Widerstand des Lichtbogens für sehr große Ströme immer nach null konvergieren muß. Bei den Elektronenröhren dagegen ist uns umgekehrt die Spannung willkürlich in die Hand gegeben, jedoch ist der Strom von dieser abhängig und stets endlich begrenzt. Folglich muß der Widerstand der Elektronenröhren mit wachsender Spannung nach unendlich konvergieren. Auch diese Überlegung führt auf das gleiche Ergebnis hinsichtlich des Verhaltens von Lichtbogen und Elektronenröhre gegenüber Schwingungskreisen wie die erste.

Zusammenfassung.

1. Die Stabilitätsbedingung für Einspeichersysteme ist allgemein erfüllt, wenn der Schließungswiderstand des Speichers positiv ist.

2. Ist eine Gleichgewichtslage bei einem Einspeichersystem stabil, so kann die Stabilität durch einen beliebig kleinen hinzukommenden Speicher leicht gestört werden, während die Labilität der Gleichgewichtslage dadurch nicht gestört werden könnte.

3. Die Labilität einer Gleichgewichtslage hat für den Fall, daß keine stabile Gleichgewichtslage erreichbar oder möglich ist, unter allen Umständen Schwingungsvorgänge zur Folge. Sind — wie z. B. bei Einspeichersystemen immer — harmonische Schwingungen nicht möglich, so treten Kippschwingungen ein.

4. Bei gegebenem Schwingungssystem entscheidet die Charakteristik des Steuerorgans über Art und Stabilität entstehender Schwingungen. Wird wie beim Lichtbogen die mittlere Neigung der fallenden Charakteristik mit wachsender Amplitude kleiner, so führt nur eine Reihenschaltung, im umgekehrten Falle z. B. beim Dynatron nur eine Parallelschaltung von Kapazität und Induktivität auf stabile harmonische Schwingungen.

Berlin-Steglitz, 10. April 1926.

(Eingegangen 13. April 1926.)

Über die Dampfdruckkurve und die molekulare Verdampfungswärme des flüssigen Kohlenstoffes.

Von H. Herbst.

Die verschiedenen Ansichten über das Schmelzen und Verdampfen von Kohlenstoff[1] veranlaßten mich auch einmal das Wort über den Gegenstand zu ergreifen:

Die grundlegende Beobachtung Lummers, daß sich die Temperatur des positiven Kraters

1) H. Alterthum, Zeitschr. f. Techn. Phys. 6, 540, 1925.

einer Kohlenbogenlampe bei Änderung des äußeren Luftdruckes ändert, und zwar mit zunehmendem Druck erhöht, ist von verschiedenen Seiten dahin ausgelegt worden, daß man es hier mit den „Siedepunkten" des flüssigen Kohlenstoffes (Graphites) bei den betreffenden Drucken zu tun habe. — Diese Auffassung würde zutreffen, wenn Lummer bei einem bestimmten Druck auch nur eine einzige bestimmte Temperatur gemessen hätte. Dies ist nun nicht der Fall. In folgendem seien unter anderem die Tabellen 32 und 33, die Lummer in seinen „Grundlagen, Zielen und Grenzen der Leuchttechnik" 1918 auf Seite 202 und 203 anführt, zum Abdruck gebracht und in beifolgender Figur mit graphisch eingezeichnet.

Tabelle I. (20. Mai 1914.)

Druck in Atm.	Helligkeit	abs. Temp.
1	1	4200
2	1,8	4610
4	3,2	5140
6	4,3	5450
8	5,3	5700
10	6,2	5900
12	6,9	6050
14	7,6	6185
16	8,3	6310
18	8,9	6415
20	9,4	6500
22	9,9	6580
24	10,4	6660
26	10,9	6740

Tabelle II. (22. Mai 1914.)

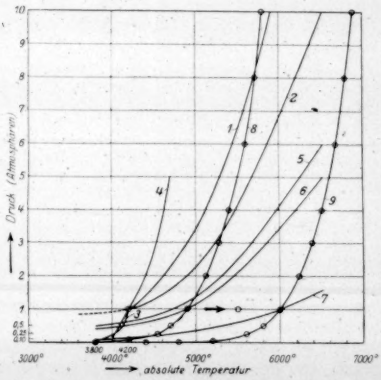
Druck in Atm.	Helligkeit	abs. Temp.
1	1	4200
2	2,5	4900
4	4,4	5470
6	6,0	5860
8	7,8	6210
10	9,5	6520
12	11,0	6760
14	12,7	7015
16	14,2	7230
18	15,6	7410
20	16,8	7560
22	18 0	7700

Tabelle III.

Druck in Atmosphären	Helligkeit	absolute Temperatur
1,0	1,0	4200
0,9	0,99	4190
0,8	0,975	4180
0,7	0,955	4165
0,6	0,925	4145
0,5	0,885	4120
0,4	0,835	4085
0,2	0,70	3985
0,1	0,59	3875

Aus den Tabellen I und II und der Figur Kurve 1 und 2 ersehen wir, daß Lummer für einen bestimmten äußeren Atmosphärendruck mehrere Temperaturwerte, je nach den Versuchsbedingungen gemessen hat. Die Kurven 1 und 2 sind mit imprägnierten „Salzkohlen" aufgenommen. Die Stromstärke für Kurve 1 betrug im Mittel 26 Amp., die für Kurve 2 dagegen 40 Amp. Wir ersehen daraus die außerordentliche Abhängigkeit der Temperatur von der Stromstärke!

Zwischen den Kurven 1 und 2 sind also eine ganze Reihe Zwischenkurven je nach den Versuchsbedingungen, insbesondere der Stromdichte, möglich. Außerdem besteht die Möglichkeit, daß noch Kurven weiter links von Kurve 1 oder rechts von Kurve 2 liegen. Bei möglichst reinen nicht imprägnierten Homogenkohlen wird man die Kurven links von Kurve 1 erwarten müssen und in der Tat zeigt auch die Kurve 4 von Kohn und Guckel einen derartigen Verlauf. — Welche von dieser großen Schar von möglichen Kurven ist die Dampfdruckkurve des flüssigen Kohlenstoffes oder liegt die Dampfdruckkurve überhaupt anders? Während Lummer nun bei Drucken von 2, 3, 4 Atm. usw.



verschiedene Temperaturwerte feststellt, findet er bei 1 Atm. merkwürdigerweise nur einen Temperaturwert! Durch meinen an anderer Stelle veröffentlichten Versuch[1]) ist nun der Nachweis erbracht, daß auch in freier Luft also bei gewöhnlichem Atmosphärendruck je nach der Strombelastung (Stromstärke und Spannung) verschiedene Temperaturen des positiven Kraters möglich sind.

Betrachten wir uns die Kurve 3 für Drucke unterhalb 1 Atm., so fällt einem sofort der Knick auf, den die Kurve 3 mit der Kurve 2 bei 1 Atm. Druck bildet. Die Kurve 2 müßte ja eigentlich wie gestrichelt angedeutet ist, unterhalb 1 Atm. Druck weiter laufen; statt dessen fällt sie so schnell in der Kurve 3 ab. Worauf beruht das? Bei der Aufnahme von Dampfdruckkurven einer ganzen Reihe von orga-

1) H. Herbst, Zeitschr. f. Phys. 1926. „Über die Steigerung der Flächenhelligkeit des positiven Kraters der frei in Luft brennenden Bogenlampe."

nischen Stoffen, die meist einen hohen Kohlenstoffgehalt über 80 Proz. hatten, habe ich niemals bei dem Druck von 1 Atm. einen derartigen Knickpunkt beobachten können. Ich kann mir nun nicht denken, wenn ich von einer Kohlenstoffverbindung mit einem hohen Prozentgehalt an Kohlenstoff auf den reinen Kohlenstoff extrapoliere, daß sich die Eigenschaften des reinen Kohlenstoffes so stark ändern sollten, daß sie zu derartigen Unregelmäßigkeiten, wie den Knick der „vermeintlichen" Dampfdruckkurve, Veranlassung geben könnten. — Die Kurven 1, 2, 3, 4, stellen daher höchstwahrscheinlich nicht die Dampfdruckkurve des flüssigen Kohlenstoffes dar. Der Verlauf der Kurve 3 insbesondere erklärt sich aus anderen experimentellen Ursachen, wie Stromstärke, Spannung usw.

Bisher wurde von verschiedenen Seiten angenommen, daß die Temperatur von etwa 4200° des positiven Kraters der unter normaler Belastung frei in Luft brennenden Kohlenbogenlampe der „Siedetemperatur" der Kohle entspricht und annähernd konstant ist, und daß durch noch so große Stromüberlastung seine Temperatur und damit seine Flächenhelligkeit über eine gewisse Höhe nicht gesteigert werden kann. — Ferner nahm man an, daß unter normalen Verhältnissen mit zunehmender Stromstärke die Größe des Kraters wächst, während sich die Flächenhelligkeit nicht ändert. — Die obige Auffassung trifft nun, wie ich an anderer Stelle[1]) zeigen konnte, nicht ganz zu. Vielmehr konnte ich bereits 1915 unter Verwendung von Dochtkohlen feststellen, daß die Temperatur des positiven Kraters in hohem Maße von der Stromstärke bzw. Spannung abhängig ist und mit ihr wächst. So konnte ich in freier Luft, also unter gewöhnlichem Atmosphärendruck, Temperaturen von 5500 und 6000 absolut erreichen.

Auch Lummer ist es bekannt gewesen, daß bei den sogenannten „Salzkohlen" (Kohlen, insbesondere Dochtkohlen, die mit Salzen imprägniert sind) der positive Krater eine bei jedem Druck um so höhere Flächenhelligkeit und damit Temperatur annimmt, je größer die benutzte Stromstärke bzw. Spannung ist. Vergleiche Lummer, „Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik" 1918, S. 204.

Im Gegensatz zu den imprägnierten Kohlen sollen nun die reinen Homogenkohlen nur einen einzigen konstanten „Siedepunkt" bei Atmosphärendruck bei 4200° haben. Das stimmt nicht. Auch die nicht imprägnierten relativ reinen Kohlen (Homogenkohlen) zeigen mit wachsender Stromstärke bzw. Spannung eine steigende Temperatur des positiven Kraters[1]); nur tritt hier keine so starke Steigerung wie bei den imprägnierten Dochtkohlen ein, weil infolge der schlechteren Leitfähigkeit des Bogens bei reinen Kohlen nur eine relativ kleine Strommenge pro mm² durch die Kohlen zu bekommen ist und damit nur eine relativ kleine Stromdichte zu erreichen ist. Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Lichtbogen infolge der geringen Leitfähigkeit des reinen Kohlenstoffdampfes eine kleine Leitfähigkeit hat, daher verteilt sich auch im Lichtbogen die Energie über eine größere Querschnittsfläche.

Die höheren bei den imprägnierten Dochtkohlen erreichbaren Temperaturen beruhen also zum größten Teil auf der besseren Stromleitfähigkeit des erhitzten imprägnierten Dochtes und damit der größeren erreichbaren Stromdichte und ferner auf der besseren Leitfähigkeit des Bogens bezüglich der Luftstrecke des Bogens, bedingt durch die Salzdämpfe!

Der schnelle Abfall der Kurve 3 bei Verminderung des Druckes unter 1 Atm., also im Vakuum wird mit dadurch bedingt, daß sich die Leitfähigkeit der Luftstrecke bei Vermindern des Druckes ändert. Ferner hat der in einem Vakuum verdampfende Kohlenstoff eine ganz andere Konzentration, wodurch auch wieder die Leitfähigkeit der Bogenstrecke sich ändert; besonders eben bei relativ reinen Homogenkohlen. Bei imprägnierten Kohlen dürfte der Abfall auch nicht so stark sein. — Auch muß die Kurve fortlaufend aufgenommen werden, bei gleicher Stromstärke, ausgehend vom niedrigsten bis zum höchsten Druck. Dann tritt der Knick auch nicht so scharf auf.

Die bei einer Bogenlampe erreichbare Temperatur des positiven Kraters hängt also ab von der Spannung und von der Stromdichte, die ihrerseits bedingt ist durch die Art der Kohlen, ihre Leitfähigkeit und Imprägnierung, ferner von der Leitfähigkeit des Bogens bezüglich der Luftstrecke des Bogens, der Bogenlänge, dem Luftdruck und dergl. — Je nach den angewandten Versuchsbedingungen lassen sich also bei jedem beliebigen Druck verschiedene Temperaturen des positiven Kraters erreichen. Wir erhalten also je nach den Versuchsbedingungen eine große Schar von Kurven. Da also der Temperaturwert des positiven Kraters durch eine ganze Reihe anderer Faktoren bedingt ist, so kann man keine der Kurven als die „Siedepunktskurve" des flüssigen Kohlenstoffes ansprechen! Um die Dampfdruck-

1) Vgl. auch W. Mathiesen, Untersuchungen über den Lichtbogen 1921, S. 77.

1) Vgl. auch W. Mathiesen, Untersuchungen über den Lichtbogen 1921, S. 77.

kurve des flüssigen Kohlenstoffes zu finden, müssen wir andere Wege einschlagen:

Zunächst ist einmal erforderlich, den genauen Schmelzpunkt des Kohlenstoffes (Graphites) zu bestimmen. Dieser liegt durch eine Reihe von Arbeiten schon einigermaßen fest. Es wurden folgende Werte gefunden[1]):

Beobachter	Schmelzpunkt des Kohlenstoffes (Graphites) absolute Temperatur
Lummer	3900°
Ryschkewitsch	3800° ± 100°
Pirani u. Alterthum	3760° ± 65°
u. Fehse	
Pirani u. Alterthum	3660°
Ryschkewitsch	3900°
Mittel:	3804° ± 100°

Im Mittel ergibt sich also für den Schmelzpunkt des Kohlenstoffes eine absolute Temperatur von 3804° ± 100°. — Lummer hat bei 0,2 Atm. Druck entsprechend 3983° den flüssigen nicht siedenden Kohlenstoff bereits beobachtet, so daß der Schmelzpunkt noch etwas tiefer liegt, daher kann der Mittelwert wohl etwa zutreffen. Für den Schmelzpunkt von Graphitstäben in Wasserstoffatmosphäre fanden Alterthum, Fehse, Pirani[2]) neuerdings 3685° und 3825° absolute Temperatur. Da sich erfahrungsgemäß der Schmelzpunkt mit dem Druck nur sehr wenig ändert, können wir, wenn wir das Schmelzen, also den flüssigen nicht siedenden Kohlenstoff bei verschiedenen Drucken, also verschiedenen Temperaturen beobachten, feststellen bis zu welcher höchsten Temperatur die flüssige nicht siedende Phase auftritt. Der Siedepunkt liegt dann noch höher. — Ich habe in freier Luft bei gewöhnlichem Atmosphärendruck die flüssige nicht siedende Phase beobachtet zwischen Temperaturen von 4300 bis etwa 4700° absoluter Temperatur. Lummer hat das nicht siedende Schmelzen beobachtet bei Drucken zwischen 0,2 bis 2,0 Atm. entsprechend einer Temperatur nach Tabelle III und II von 3958 bis 4900°. — Der „Siedepunkt" des flüssigen Kohlenstoffes bei 1 Atm. Druck liegt also sicher höher als 4700°, weil eben bei 4700° noch kein „Sieden" beobachtet worden ist, sondern nur nicht siedende Flüssigkeit. — Die durch den Punkt 4700°/1 Atm. gezeichnete Kurve 5 (Tabelle V) dürfte etwa die maximal mögliche Dampfdruckkurve darstellen, in der fraglichen Annahme, daß die Kurve ähnlich der Kurve 2 verläuft. — Unter Berücksichtigung der Lummerschen Schmelzbeobachtung von 4900° ergibt sich Kurve 6 (Tabelle VI). — Beobachtet man die nicht siedende flüssige Schmelze bei noch höheren Temperaturen als 4900°, so liegt eben der Siedepunkt bei 1 Atm. Druck noch höher, die Dampfdruckkurve verläuft also noch niedriger.

Fajans[1]) nimmt an, daß die zu den höchsten erreichbaren Temperaturen gehörigen Drucke den Dampfdrucken des Kohlenstoffes entsprechen. — Wenn dieser Satz richtig ist, so wäre, da ich bei meinem Versuch bei 1 Atm. Druck 5500 und 6000° erreicht habe als Siedepunkt des flüssigen Kohlenstoffes bei Atmosphärendruck im höchsten Falle eine Temperatur von etwa 6000° anzusprechen. — Kurve 7 (Tabelle VII) gibt dies wieder. Kurve 7 stellt also die zurzeit äußerste Grenze dar. — Kurve 5 bis 7 sind in der fraglichen Annahme gezeichnet, daß der Dampfdruck des flüssigen Kohlenstoffes ähnlich der Kurve 2 verläuft. Nun entspricht aber die Kurve 2 durchaus nicht der Dampfdruckkurve des Kohlenstoffes, wie wir gesehen haben, sondern ihre Form ist mit durch verschiedene andere Faktoren bedingt. Ich halte es daher für viel wahrscheinlicher, daß der Dampfdruck des flüssigen Kohlenstoffes ähnlich der Dampfdruckkurve der organischen Stoffe verläuft, etwa wie Kurve 8 andeutet.

Die Kurve 8 (Tabelle VIII) habe ich aus dem Siedepunkt von 4900° bei 1 Atm. berechnet in der berechtigten Annahme, daß sich der Dampfdruck ähnlich ändert wie bei hochsiedenden organischen Verbindungen. Die Kurvenform hat also eine große Wahrscheinlichkeit für sich. Ergeben die weiteren Beobachtungen, daß der Siedepunkt bei 1 Atm. noch höher liegt, so wandert die Kurve 8 in der Pfeilrichtung nach rechts.

Die Kurve 9 (Tabelle IX) habe ich aus dem angenommenen Siedepunkt von etwa 6000° bei 1 Atm. berechnet, dem höchsten Temperaturpunkt, den ich bei 1 Atm. beobachtet habe; auch in der Annahme, daß sich der Dampfdruck ähnlich ändert wie bei hochsiedenden organischen Verbindungen. — Die Kurve 9 stellt nach den bisherigen Beobachtungen die äußerste Grenze dar.

Berechnet man die molekulare Verdampfungswärme λ des flüssigen Kohlenstoffes nach der Formel Nernst, Theoretische Chemie 1913, S. 61:

$$\lambda = \frac{1{,}985 \cdot 2{,}303 \cdot T_1 \cdot T_2}{T_2 - T_1} \cdot \log \frac{p_2}{p_1} \text{ (cal)},$$

1) Zeitschr. f. Techn. Phys. **6**, 541—542, 1925.
2) Alterthum, Fehse, Pirani, Zeitschr. f. Elektrochemie 1925, S. 313.

1) Fajans, Zeitschr. f. Phys. 1, 101, 1920. Ber. der Dt. chem. Ges. **53**, 643, 1920; **55**, 2826, 1922.

so ergibt sich für die Kurve 8:

$$\begin{aligned} p_2 &= 8 \text{ Atm.} \\ T_2 &= 5720^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \text{ Atm.} \\ T_1 &= 4900^0 \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich für $\lambda = 141$ Kalorien. Für Kurve 9 ergibt sich:

$$\begin{aligned} p_2 &= 8 \text{ Atm.} \\ T_2 &= 6800^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \text{ Atm.} \\ T_1 &= 6000^0 \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich für $\lambda = 211$ Kalorien.

Die molekulare Verdampfungswärme λ liegt also sicher zwischen 141 und 211 Kalorien. — Bisher wurde von Wertenstein und Jedrzejewski[1]) durch direkte Messung der Gewichtsabnahme pro Oberflächeneinheit und Zeiteinheit und der gebrauchten Wärme für die Sublimationswärme des festen Kohlenstoffes ein Wert von 216 Kalorien gefunden. Rechnet man ca. 10 Kalorien für die Schmelzwärme ab, so bleiben 206 Kalorien für die Verdampfungswärme des flüssigen Kohlenstoffes. — Dieser Wert würde mit dem Wert aus der Kurve 9 von 211 Kalorien gut übereinstimmen. Wenn der Wert von Wertenstein also richtig ist, müßte ich daraus schließen, daß der Siedepunkt des flüssigen Kohlenstoffes bei etwa 6000° liegt, mein höchster Temperaturwert bei 1 Atm. war genau 5960° absolut, entsprechend einem Wert für die molekulare Verdampfungswärme von $\lambda = 208$ Kalorien. Dafür würden auch die Abbrand- bzw. Verdampfungseigenschaften der Kohle sprechen. Bei Kurve 9 hat der Kohlenstoff bei 4200° nur noch einen Dampfdruck von etwa 0,001 Atm. = 0,8 mm Hg und das kann etwa stimmen, während nach Kurve 8 der Dampfdruck bei 4200° noch 0,1 Atm. = 76 mm Hg beträgt, was mir noch zu hoch erscheint. Die Kurve 9 hat also zurzeit die größte Wahrscheinlichkeit für sich.

Die aus den von Kohn und Guckel und Ryschkewitsch beobachteten Bogenlampendruckkurven berechneten Werte für die Verdampfungswärme von 132,9 bzw. 92 Kalorien sind nicht einwandfrei, weil die Bogenlampendruckkurven keine reinen Siedepunktskurven sind!

Wie erklären sich die Forscher, die annehmen, daß die Temperatur des positiven Kraters von ca. 4200° abs. bei Atmosphärendruck dem Siedepunkt des flüssigen Kohlenstoffes entspricht, die Tatsache, daß der flüssige noch nicht siedende Kohlenstoff in freier Luft bis zu einer Temperatur von 4700 ja 4900° sicher beobachtet worden ist? Von einem „Siedeverzug" kann hier natürlich gar keine Rede sein, da man das Sieden überhaupt noch nicht beobachtet hat.

Über den Unterschied in der Kohn u. Guckelschen und Ryschkewitschschen Bogenlampendruckkurve braucht man sich überhaupt nicht zu wundern, denn ich habe ja dargelegt, daß man je nach den Versuchsbedingungen unendlich viele verschiedene Bogenlampendruckkurven erhalten kann. — Die Ryschkewitschsche Kurve liegt z. B. zwischen Kurve 1 und 4.

In folgendem sind die Tabellen IV bis IX zusammengestellt (S. 371).

Es liegt jedenfalls heute klar auf der Hand, daß die Brenntemperaturen der Bogenlampe bei verschiedenen Drucken nicht die „Siedepunkte" des flüssigen Kohlenstoffes darstellen, sondern willkürliche „Verdunstungspunkte", die durch allerlei andere Faktoren mit bedingt sind. — Es wäre aber wünschenswert, wenn einmal vom kleinsten bis zum höchsten Druck durchlaufende Messungen gemacht würden; wobei bei jedem Druck die Spannung, die Stromstärke und damit die Stromdichte, Bogenlänge, Kohlenstärke usw. weitgehend variiert werden, sowohl bei Homogenkohlen als auch bei imprägnierten Kohlen insbesondere Dochtkohlen. — Zu berücksichtigen ist bei allen Versuchen die Kohlensorte, ihr Aschengehalt, Salzgehalt und die Zusammensetzung der Kohlensubstanz, die oft auch nicht ganz rein ist, sondern geringe Mengen Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff gebunden enthalten kann, je nach dem Ausgangsmaterial, aus dem die Kohle hergestellt wurde. — Dadurch erklären sich auch die relativ großen Unterschiede im Schmelzpunkt, die verschiedene Forscher finden. — Dabei entsprechen die höchsten Werte dem Schmelzpunkt des reinsten Kohlenstoffes.

Dabei muß bei jeder Messung der Zustand des Kraters und Bogens festgestellt werden und besonders darauf geachtet werden, ob man ein wirkliches „Sieden" beobachten kann!

Die beim Schmelzprozeß beobachteten „Waben" entstehen beim Verkohlungsprozeß aus dem Teer, der als Bindemittel bei der Fabrikation der Kohlen zugesetzt wird. Nach meinen Beobachtungen neigen organische Substanzen, wie Teer und dergleichen, beim Verkohlen zu derartigen Wabenbildungen. — Um eine maximale Ökonomie der Bogenlampe bei größter Flächenhelligkeit zu erreichen, muß in den Kohlen und in dem Bogen die Energie auf einen möglichst kleinen Raumquerschnitt konzentriert werden.

Die Temperatur, die der positive Krater der in freier Luft brennenden Bogenlampe zeigt,

1) Wertenstein u. Jedrzejewski, C. R. 177, 316, 1923.

Tabelle IV. (Kurve 4.)

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
5	4700°
2	4400
1	4200
0,5	4080
0.25	4030
0,1	4000
0.06	3990

Tabelle V. (Kurve 5.)

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
6	6520°
4.85	6210
3.65	5860
2.4	5470
1,2	4900
1,0	4700
0.6	4200
0,5	3800

Tabelle VI. (Kurve 6.)

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
5	6520°
4	6200
3	5860
2	5470
1	4900
0,5	4200
0,4	3800

Tabelle VII. (Kurve 7.)

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
1,6	6520°
1,25	6210
0,0	6000
0,6	5470
0,3	4900
0,15	4200
0,1	3800

Tabelle VIII. (Kurve 8.) (Maximum.) Dampfdruckkurve des flüssigen Kohlenstoffes.

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
10	5800°
8	5720
6	5600
4	5400
3	5280
2.5	5200
2	5120
1	4900
0,5	4700
0,25	4540
0,1	4200
0,05	4000
0,025	3800

Tabelle IX. (Kurve 9.) Wahrscheinlichste Dampfdruckkurve des flüssigen Kohlenstoffes.

Druck in Atmosphären	absolute Temperatur
10	6880°
8	6800
6	6680
4	6500
3	6389
2.5	6300
2	6220
1	6000
0,5	5800
0,25	5600
0,11	5400
0,05	5200
0,025	5000
0,012	4800
0,005	4600
0,0025	4400
0,0011	4200
0,0005	4000
0,0002	3800

ist keine „Normaltemperatur", sondern von verschiedenen Faktoren, wie Stromstärke, Spannung, Kohlesorte usw. abhängig. Man kann daher die Temperatur der frei in Luft brennenden Bogenlampe nicht so ohne weiteres als Fixpunkt für irgendwelche Lichtmessungen annehmen.

Die Ansicht, daß es in freier Luft nicht möglich sei den Kohlenstoff über seine „Normaltemperatur" von 4200° zu erhitzen ist nicht richtig. Es ist möglich, den positiven Krater in freier Luft bis auf 6000° absol. — den wahrscheinlichen Siedepunkt des flüssigen Kohlenstoffes — zu erhitzen. Ob man in praxi aber die Bogenlampe bei 6000° brennen kann ist fraglich, weil die Abbrandgeschwindigkeit der Kohlen dann sehr groß wird. — Interessant wäre auch festzustellen, ob man die Temperatur des positiven Kraters der frei in Luft brennenden Bogenlampe noch über 6000° absol. hinaussteigern kann?

(Eingegangen 8. April 1926.)

Zur Verteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft.

Von Wilhelm Schmidt.

Ableitung der Formel.

V. F. Heß und der Verfasser hatten gemeinsam vor acht Jahren die senkrechte Verteilung der radioaktiven Gase in der freien Luft, wie sie sich unter dem Spiel des Austausches und der Konvektionsströmungen einstellt, theoretisch abzuleiten versucht[1]). Da indes damals die Kenntnisse über die Regsamkeit des Austausches, insbesondere über deren Abhängigkeit von der Höhe, noch gering waren, mußten wir uns damit begnügen, für die entsprechende Beizahl A je einen großen und einen kleinen Wert einzusetzen, diesen aber jedesmal über die Höhen konstant anzunehmen. Neuerdings kam man aber von zwei verschiedenen Seiten, von der beobachteten senkrechten Verteilung der Windgeschwindigkeit einerseits, von einer Übertragung der für Rohrströmung gefundenen Gesetze anderseits, zu brauchbaren Angaben über die Abhängigkeit des A von der Höhe z über dem Boden. Diese gestatten nun, die Aufgabe schärfer und eingehender zu lösen.

Die Bezeichnungen werden im allgemeinen von den angeführten Stellen herübergenommen: S eine mit der Masse der Luft verknüpfte Größe (z. B. Emanationsmenge), s Gehalt der Masseneinheit Luft an S (Emanationsgehalt); die Schichtung sei durchaus wagrecht, ebenso auch jede Strömungslinie der ausgeglichenen, von den Konvektionswirbeln absehenden Strömung; dann läßt sich die Wirkung des Austausches, analog einer vielfach gesteigerten Diffusion, darstellen

1) Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. Physik. Zeitschr. **19**, 109, 1918; vgl. hier und für das folgende: W. Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft usw., Hamburg 1925.

durch den sekundlichen Fluß an S quer durch 1 qcm wagrechter Fläche (Emanationsfluß):

$$\mathfrak{S} = -A \cdot ds/dz. \qquad (1)$$

Für A, die „Größe des Austausches", hat man nun nach den erwähnten Quellen im Mittel eine Funktion der Höhe einzusetzen der Gestalt

$$A = A_1 \cdot z^{\frac{\beta-1}{\beta}} = A_1 \cdot z^{n}.$$

Dieser Exponent dürfte der geeignetste sein; aus Mittelwerten der Windgeschwindigkeit hat man einen nur wenig verschiedenen abgeleitet als aus Augenblickswerten. A_1 ist der Austausch in der Höhe $z = 1$, also, wenn wir alles in absoluten Einheiten angeben, in 1 cm über dem Boden.

Man gehe nun von einer Luftschichte zwischen den Höhen z und $z + \Delta z$ aus, denke sich in ihr ein senkrechtes Säulchen vom Querschnitt 1 abgegrenzt. Zufolge der Austauschströme wächst ihm in der Zeit dt die Emanationsmenge zu:

$$dS_1 = -\mathfrak{S}' \cdot \Delta z = (A' \cdot s' + A \cdot s'') \cdot \Delta z \cdot dt$$

(durch Striche die Ableitungen nach z bezeichnet).

Im gleichen Zeitraum verschwindet aber von der in dem Säulchen enthaltenen Emanationsmenge $s \cdot \varrho \cdot \Delta z$ (ϱ = Luftdichte) durch radioaktiven Zerfall der Betrag:

$$dS_2 = -s \cdot \varrho \cdot \lambda \cdot \Delta z \cdot dt$$

(λ die Zerfallskonstante).

Die gesamte Änderung des Emanationsgehaltes in der Säule, die Summe der beiden errechneten Beträge, wird bei erreichtem Gleichgewichtszustand gleich Null, woraus folgt:

$$A' \cdot s' + A \cdot s'' - \varrho \cdot \lambda \cdot s = 0,$$

und setzt man die besondere Funktion für A ein, ergibt sich:

$$\tfrac{1}{3} \cdot A_1 \cdot z^{-1/3} \cdot s' + A_1 \cdot z^{1/3} \cdot s'' - \varrho \cdot \lambda \cdot s = 0. \qquad (2a)$$

Es wäre nun für bestimmte Werte von A, ϱ und λ das Integral dieser Gleichung zu finden.

Herrn Dr. Anton Huber, Assistenten an der Hochschule für Bodenkultur, verdanke ich folgenden Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung:

$$s'' + \frac{\beta-1}{\beta} \cdot \frac{1}{z} \cdot s' - a \cdot z^{\frac{1-\beta}{\beta}} \cdot s = 0, \qquad (2b)$$

β eine ganze Zahl, in unserem Fall $= 7$, $a = \varrho \cdot \lambda / A_1$.

Durch Einführen einer neuen Variablen

$$x = \beta \cdot z^{\frac{1}{\beta}}$$

gewinnt sie die Gestalt:

$$s'' - c^2 \cdot x^{\beta-1} \cdot s = 0, \qquad (3)$$

wobei nun die Ableitung nach x zu nehmen ist und der immer positive Faktor $c^2 = a \cdot \beta^{1-\beta}$. Die Lösung von (3) setzt man an in der Form:

$$s = \int e^{-p \cdot X} \cdot P \cdot dp, \qquad (4)$$

worin P und X als Funktionen von p bzw. x noch zu bestimmen und die Integrationsgrenzen geeignet zu wählen sind.

Einsetzen in (3) liefert:

$$\left.\begin{aligned} &\int e^{-p \cdot X} \cdot [p^2 \cdot (X')^2 - c^2 \cdot x^{\beta-1}] \cdot P \cdot dp - \\ &- \int p \cdot e^{-p \cdot X} \cdot P \cdot X'' \cdot dp = 0. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Nun wird X so bestimmt, daß $(X')^2 = c^2 \cdot x^{\beta-1}$, also $X = \frac{2 \cdot c}{\beta-1} \cdot x^{\frac{\beta-1}{2}}$. Multipliziert man (5) mit

$$X / (c^2 \cdot x^{\beta-1}) = 2\, x^{-\frac{\beta-3}{2}} / (\beta+1)$$

so wird:

$$\int e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1) \cdot P \cdot dp \cdot X - \frac{\beta-1}{\beta+1} \cdot \int p \cdot e^{-p \cdot X} \cdot P \cdot dp = 0$$

und nach partieller Integration des ersten Teiles:

$$\left.\begin{aligned} &- \left| e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1) \cdot P \right| + \\ &+ \int e^{-p \cdot X} \cdot \frac{d}{dp} [(p^2 - 1) \cdot P]\, dp - \\ &- \frac{\beta-1}{\beta+1} \cdot \int e^{-p \cdot X} \cdot P \cdot p \cdot dp = 0, \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

wobei im ersten Glied die noch unbekannten Grenzen einzusetzen wären. Nun bestimmt man P so, daß die letzten beiden Glieder, die man in ein Integral zusammenziehen kann, verschwinden. Das liefert die Bedingung:

$$\frac{d}{dp} [(p^2 - 1) \cdot P] = \frac{\beta-1}{\beta+1} \cdot P \cdot p$$

oder

$$\frac{\frac{d}{dp} [(p^2 - 1) \cdot P]}{(p^2 - 1) \cdot P} = \frac{\beta-1}{\beta+1} \cdot \frac{p}{p^2 - 1},$$

also:

$$\lg [(p^2 - 1) \cdot P] = \frac{\beta-1}{2\,(\beta+1)} \lg (p^2 - 1) + m,$$

woraus:

$$P = m \cdot (p^2 - 1)^{-\frac{\beta+3}{2(\beta+1)}}. \qquad (7)$$

Damit nun in (6) die ganze linke Seite verschwinde, wählen wir die Grenzen der Integration so, daß:

$$\left| e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1) \cdot P \right| = m \cdot \left| e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1)^{-\frac{\beta-1}{2(\beta+1)}} \right| = 0$$

wird.

Da der Bruch im Exponenten des Klammerausdruckes positiv ist, ergeben sich als Grenzen $p = +1, -1, \infty$.

Dies, X und P in den Ansatz (4) eingesetzt, liefert zwei unabhängige partikuläre Integrale, das erste:

$$s_1 = \int_1^\infty e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1)^{-\frac{\beta+3}{2(\beta+1)}} \cdot dp;$$

das zweite, s_2, unterscheidet sich nur durch die Grenzen, -1 und $+1$.

Das allgemeine Integral wird:

$$s = B \cdot s_1 + C \cdot s_2. \qquad (8)$$

Nunmehr sind die physikalischen Randbedingungen zu erfüllen: es soll z. B. der Emanationsgehalt in den einzelnen Höhen ausgedrückt werden in Bruchteilen desjenigen in der Höhe 1, woraus:

$$s(1) = B \cdot s_1(1) + C \cdot s_2(1) = 1.$$

Da nun der Klammerausdruck $(p^2 - 1)$ im ganzen Bereich zwischen den Grenzen von s_2 durchaus negativ ist, sein Exponent aber den Faktor 2 im Nenner enthält, kann $s_2(1)$ nur einen komplexen Wert besitzen, folglich muß $C = 0$ sein. Übrig bleibt $B \cdot s_1(1) = 1$, somit:

$$s(z) = s_1(z) / s_1(1). \qquad (9)$$

Noch eine zweite physikalisch vorgegebene Grenzbedingung ist zu erfüllen: setzt man voraus, daß die Emanation vom Boden ausgehe, so muß ihr Gehalt in sehr großen Höhen verschwindend klein werden, d. h. $s(\infty) = 0$. Dies ist offenbar auch erfüllt, (9) stellt also die Lösung unserer Aufgabe dar.

s_1 läßt sich nun nicht durch elementare Funktionen darstellen, es muß für die in Betracht kommenden Zahlenwerte von A, ϱ, λ und z einzeln ausgewertet werden. Einzusetzen ist nach Maßgabe der beobachteten Abhängigkeit des A von der Höhe der Wert $\beta = 7$, was als Exponent des Klammerausdruckes $-5/8$ liefert; ferner wird:

$$X = \frac{7}{4} \sqrt{\frac{\varrho \lambda}{A_1}} \cdot z^{1/7}.$$

Um die allgemeine Anwendung auf verschiedene A_1, ϱ und λ zu sichern, empfiehlt es sich, das Integral:

$$Q = \int_1^\infty e^{-p \cdot X} \cdot (p^2 - 1)^{-5/8} \cdot dp = \int_1^\infty 10^{-N \cdot p} \cdot (p^2 - 1)^{-5/8} \cdot dp, \qquad (10)$$

wo $N = M \cdot X$ (M der Modul der natürlichen Logarithmen $= 0{,}43429$), für verschiedene N zu tabulieren.

Für den Hauptteil des Bereiches geschah die Ermittlung durch Planimetrieren, dessen Anwendbarkeit durch zweckentsprechende Koordinatentransformation wesentlich erweitert wurde; für anliegende Gebiete wurde Berechnung nach der Simpsonschen Formel gewählt, während die Abschnitte an der oberen und unteren Grenze durch Annäherung zu bestimmen blieben.

Für den ersteren Bereich, in dem die p nahe 1 liegen, ergibt sich:

$$\int_1^{1+\varepsilon} e^{-K \cdot p} (p^2 - 1)^{-5/8} \cdot dp < e^{-K} \int_1^{1+\varepsilon} (p^2 - 1)^{-5/8} \cdot dp,$$

hierin statt $p - 1$ eine neue Variable eingeführt, nach dieser in eine Potenzreihe entwickelt und gliedweise integriert folgt als Betrag der Wert der Reihe:

$$e^{-K} \cdot \varepsilon^{3/8} \cdot 2^{-5/8} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{65}{304} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \cdots \right).$$

Er wird:

$$= 0{,}3981 \cdot 10^{-N} \text{ für } \varepsilon = 0{,}02$$
$$= 0{,}07091 \cdot 10^{-N} \text{ „ } \varepsilon = 0{,}0002$$
$$= 0{,}002242 \cdot 10^{-N} \text{ „ } \varepsilon = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Gegen die obere Grenze hin, für genügend große p, so daß deren Quadrat groß wird gegenüber 1, wird statt:

$$\int_\omega^\infty e^{-K \cdot p} \cdot (p^2 - 1)^{-5/8} \cdot dp$$

die Annäherung:

$$e^{-K\omega} \int_\omega^\infty p^{-5/8} \cdot dp = 4 \cdot e^{-K \cdot \omega} \cdot \omega^{-1/8} = 4 \cdot 10^{-N \cdot \omega} \cdot \omega^{-1/8}$$

benutzt. Die Auswertung mit den anderen Mitteln wurde im allgemeinen so weit getrieben, daß diese Korrektur überhaupt nicht mehr in Betracht kam.

Die folgende Tabelle enthält die so erhaltenen Werte Q für jenen Bereich der N, der für praktische Zwecke benötigt werden dürfte. Die N sind so dicht gesetzt, daß sie zur Sicherstellung des Verlaufes ausreichen. Da die Q sehr verschieden ausfallen, die Beträge des Ausdruckes $R = \log_{10} Q + N$ aber in dem ganzen Bereich zwischen $+0{,}7$ und $-1{,}1$ liegen, empfiehlt es sich zur Interpolation die letzteren zu verwenden; graphisch am besten mit $\log N$ und R als Koordinaten.

Tabelle I.

Werte des Integrals $Q = \int_1^\infty 10^{-Np} \cdot (p^2-1)^{-1/4} \cdot dp$ für verschiedene N.

N	Q	$K = \log Q + N$
10^{-5}	4,684	0,6706
10^{-4}	4,450	0,6485
10^{-3}	3,926	0,5949
0,01	3,114	0,5033
0,02	2,755	0,4601
0,05	2,154	0,3832
0,1	1,636	0,3138
0,2	1,072	0,2302
0,5	0,413	0,1155
1,0	$1{,}079 \cdot 10^{-1}$	$0{,}0231^{-1}$
2	$0{,}850 \cdot 10^{-2}$	$0{,}0204^{-1}$
5	$0{,}606 \cdot 10^{-3}$	$0{,}7823^{-1}$
10	$0{,}472 \cdot 10^{-10}$	$0{,}6737^{-1}$
20	$0{,}305 \cdot 10^{-20}$	$0{,}5618^{-1}$
50	$0{,}257 \cdot 10^{-50}$	$0{,}4105^{-1}$
100	$0{,}198 \cdot 10^{-100}$	$0{,}2978^{-1}$
200	$0{,}152 \cdot 10^{-200}$	$0{,}1827^{-1}$
500	$0{,}110 \cdot 10^{-500}$	$0{,}0398^{-1}$
1000	$0{,}0834 \cdot 10^{-1000}$	$0{,}9238^{-2}$

Zahlenwerte und ihre Besprechung.

Diese Tabelle bildete nun die Grundlage für die weitere Zahlenrechnung: in die Formel für

$$N = M \cdot X = 0{,}43429 \cdot \frac{7}{4} \cdot \sqrt{\varrho \frac{\lambda}{A_1}} \cdot z^{7/4},$$

wurden der Reihe nach die Zerfallskonstanten λ der drei Emanationen eingesetzt, und zwar für:

	RaEm	*ThEm*	*AcEm*
$\lambda =$	$2{,}106 \cdot 10^{-6}$	$1{,}272 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1768$ sec^{-1},

ferner jeweilig auch für das langlebigste weitere Zerfallsprodukt, d. i.:

	RaD	*ThB*	*AcB*
$\lambda =$	$1{,}37 \cdot 10^{-9}$	$1{,}82 \cdot 10^{-5}$	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$ sec^{-1}.

Jene Zerfallsprodukte nämlich, die nur kurze Lebensdauer haben im Vergleich zur Emanation, werden sich in ihrer Höhenverteilung ganz dieser anschließen; die hier herausgegriffenen verbreiten sich jedoch viel gleichmäßiger als die Emanationen, und daß sie feste Körper sind, hat bei ihrer feinen Verteilung weiter keinen besonderen Einfluß (vgl. die frühere Veröffentlichung). Ihr Entstehungsort kann, wie die späteren Zahlen zeigen, unbedenklich an die Erdoberfläche verlegt werden, nun sogar mit viel mehr Berechtigung als im früheren Aufsatz. Die Mühe einer genaueren Rechnung wäre, wenn solche überhaupt so leicht möglich, in gar keinem Verhältnis zum erzielbaren Ergebnis, das ja nur eine allgemeine Übersicht liefern soll, gestanden.

Der Zahlenwert für den Austausch wurde entsprechend verschiedenen meteorologischen Erfahrungen so gewählt, daß sich in 100 m Höhe ($z = 10000$ cm) der Wert $\bar{A} = 50$ cm$^{-1} \cdot g \cdot$ sec^{-1} ergab; das führte auf $A_1 = 0{,}01864$. Aus der hierfür errechneten Zahlentafel wurden dann jene abgeleitet, die für annähernd halb so großes und doppelt so großes $\bar{A}$, genauer $\bar{A} = 22{,}6$ und $\bar{A} = 110{,}5$ gelten. Die Stufen in z sind für geringe Höhen recht dicht gesetzt, angepaßt dem hier recht bedeutenden Gefälle des Emanationsgehaltes s. Die Luftdichte ϱ wurde, um die Rechnung zu vereinheitlichen, durchaus $= 1.25 \cdot 10^{-3}$ angenommen. Da sie aber in Wirklichkeit mit der Höhe abnimmt, sind die für bestimmte z errechneten Werte etwas davon abweichenden Höhen h über dem Boden zuzuordnen. Unter mittleren Verhältnissen (am Meeresspiegel Luftdruck 762 mm Hg, Temperatur 10° C, senkrechte Temperaturverteilung etwa der in Mitteleuropa gefundenen entsprechend) ergeben sich für die niedrigeren Höhen vernachlässigbare Unterschiede zwischen z und h; erst über 1000 m werden sie erheblicher. In den folgenden Tabellen sind deshalb die z und die h angeführt. Angaben für z über 8000 m haben für unsere Lufthülle keinen Sinn (jenes ist ja rund die Höhe der „homogenen Atmosphäre"), und deshalb wäre für diesen Fall die Aufgabe eigentlich unter der Annahme dieser Höhe als oberer Begrenzung zu rechnen gewesen. Doch gehören die Schichten über $z = 6000$ m bereits der Stratosphäre an, sind also nicht in gleicher Weise in den Austausch einbezogen, wie die unteren der Troposphäre, und es ist von vornherein nicht angezeigt, in sie hinein dasselbe Gesetz der Zunahme des Austausches gelten zu lassen wie in den tieferen Lagen. Man wird deshalb die Zahlen für große Höhen, die ja nur bei *RaD* auftreten, bloß als untere Grenzwerte auffassen, im wesentlichen eine merklich gleichförmigere Verteilung erwarten.

Aus den Tabellen, in denen zwecks leichterer Lesbarkeit der Gehalt knapp über dem Boden $= 1000$ gesetzt wurde, geht ebenso wie aus der zeichnerischen Darstellung (Figur) die starke Abnahme des Gehaltes an Emanationen und deren Zerfallsprodukten mit zunehmender Höhe hervor. Sie ergibt sich viel stärker als nach unserer früheren Berechnung auf Grund durchaus konstanten Austausches: es wirkt einerseits die geringere Durchmischung der tieferen Schichten hemmend auf die Nachfuhr vom Boden, anderseits wird aber das, was dennoch in größere Höhen gelangt, wegen des dort stärkeren Aus-

Tabelle II.

Gehalt s in verschiedenen Höhen über dem Boden, ausgedrückt in Tausendteilen desjenigen knapp über dem Boden.

a) Austausch in 100 m Höhe $\bar{A} = 50$ abs. Einh.

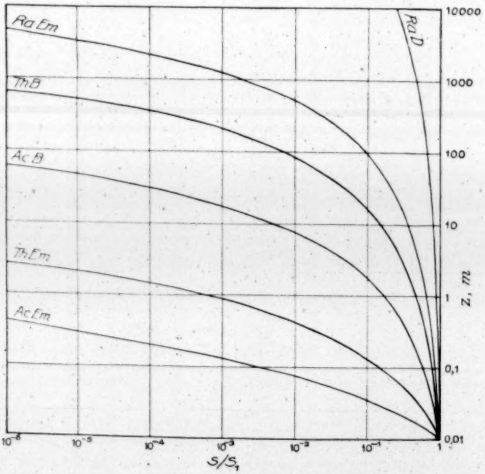
z m	h m	*Ra-Em*	*Th-Em*	*Ac-Em*	*Ra D*	*Th B*	*Ac B*
0,01	0,01	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0,02	0,02	961	690	347	985	944	886
0,05	0,05	906	352	41,6	960	856	723
0,1	0,1	860	166	3,45	942	798	588
0,2	0,2	805	57,7	0,091	923	693	454
0,5	0,5	717	6,92	0,0005	899	573	287
1	1	644	0,575	$< 10^{-3}$	878	474	177
2	2	566	0,015		841	373	89,9
5	5	454	$< 10^{-4}$		804	243	24,1
10	10	363			774	158	5,33
20	20	276			743	86,1	0,588
50	50	166			696	26,6	0,007
100	100	96,5			654	6,56	$< 10^{-4}$
200	201	45,6			605	0,995	
500	512	10,4			521	0,019	
1000	1053	1,88			470	$< 10^{-3}$	
2000	2201	0,163			405		
3000	3622	0,022			365		
4000	5217	0,004			335		
5000	7138	$< 10^{-3}$			312		
6000	9648				293		
7000	13389				277		

b) Austausch in 100 m Höhe $\bar{A} = 22{,}6$ abs. Einh.

z m	h m	*Ra-Em*	*Th-Em*	*Ac-Em*	*Ra D*	*Th B*	*Ac B*
0,01	0,01	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0,025	0,025	943	510	120	975	907	815
0,05	0,05	895	241	9,94	957	845	663
0,1	0,1	858	83,6	0,263	937	734	512
0,25	0,25	746	10,0	0,0015	913	607	324
0,5	0,5	670	0,832	$< 10^{-7}$	891	502	199
1	1	588	0,022		854	395	102
2,5	2,5	472	$< 10^{-4}$		816	258	27,2
5,0	5	378			786	167	6,01
10	10	287			754	91,2	0,663
25	25	173			707	28,2	0,007
50	50	100			664	7,04	$< 10^{-4}$
100	100	47,4			615	1,05	
250	252	10,8			529	0,020	
500	512	1,95			477	$< 10^{-3}$	
1000	1053	0,169			411		
1500	1628	0,023			371		
2000	2261	0,004			340		
2500	2916	0,001			317		
3000	3622	$< 10^{-3}$			297		
5000	7138				245		

c) Austausch in 100 m Höhe $\bar{A} = 110{,}5$ abs. Höhe.

z m	h m	*Ra-Em*	*Th-Em*	*Ac-Em*	*Ra D*	*Th B*	*Ac B*
0,01	0.01	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0.02	0.02	943	662	338	986	932	857
0.04	0.04	906	457	117	971	880	760
0,1	0,1	855	233	14.1	947	798	620
0,2	0.2	811	110	1.16	929	754	504
0,4	0,4	759	38,2	0,031	910	646	389
1	1	676	4.58	$< 10^{-3}$	887	535	246
2	2	607	0,380		865	442	152
4	4	534	0,010		829	348	77,1
10	10	428	$< 10^{-4}$		793	229	20,7
20	20	342			763	147	4.57
40	40	260			732	80.3	0,504
100	100	156			687	24,8	0.006
200	200	91,0			645	6,49	$< 10^{-4}$
400	407	42.9			597	0.949	
1000	1053	9,78			514	0,017	
2000	2261	1.77			464	$< 10^{-3}$	
4000	5217	0.153			399		
6000	9648	0,021			360		
8000	22951	0,004			330		



Höhenverteilung radioaktiver Stoffe in der freien Luft. Ordinaten: Höhen in Meter, Abszissen: Gehalt in Bruchteilen des Gehaltes in 1 cm Höhe. Beide Größen auf logarithmischer Skala aufgetragen.

tausches auf weiteren Raum verteilt. Die rasch zerfallenden Emanationen von Thorium und Actinium sind in der Regel bloß in den untersten Metern zu finden, ihre beständigeren Zerfallsprodukte können weiter hinaufreichen, etwa bis 50—100 m merklich. *RaEm* wäre trotz ihrer langen Lebensdauer bereits in 3 m auf die Hälfte des Gehaltes am Boden gesunken, in etwa 30 m auf ein Viertel — das Gesetz der Abnahme ist nun nicht so einfach wie im Falle eines konstanten A, wo wir ohne weiteres eine „Halbwertshöhe" angeben konnten, die für *RaEm* bei rund 1200 m lag! Eine so gleichmäßige Verteilung tritt auch bei den etwa doppelt so

Tabelle III.

Tag	Höhe h, m	Emanationsgehalt, Curie/10^{15} cm^3 beob.	ber. mit $\bar{A}=22.6$	$\bar{A}=50$	$\bar{A}=110.5$
8. Februar 1924	600	178	168	168	168
	2300	24	0,4	3,2	11,4
	3800	0	0,04	0,4	3,1
20. August 1924	350	426	426	426	426
	1450	28	2,5	15,5	45
	2000	0	0,4	4,9	19

hohen Austauschwerten, mit denen Tabelle IIc gerechnet wurde, nicht ein: die erwähnten Stufen sind bei rund 9 bzw. 40 m zu finden. Halber Austausch, Tabelle IIb, setzt sie auf 2 bzw. 15 m herab. Im allgemeinen erweist sich die senkrechte Verteilung der radioaktiven Gase, ins besondere in gewissen Höhenschichten, als recht empfindliche Probe auf den $\bar{A}$-Wert.

Daß die Grundlagen der Rechnung möglichst einfach genommen werden mußten, versteht sich von selbst. Jene bezieht sich also vor allem auf Mittelwerte, wogegen ausdrücklich auf die zeitliche und örtliche Veränderlichkeit des A hingewiesen werden muß. Bei starker Luftbewegung und hohem senkrechten Temperaturgefälle, das dem adiabatischen (1° C/100 m) nahekommt, hat es hohe Werte, bei schwachem Wind, besonders aber bei geringem, sich bis zur Temperaturumkehr steigernden Temperaturgefälle mitunter recht niedrige. Es scheint indes, als träfen diese starken Schwankungen im wesentlichen bloß die bodennahen Schichten, weniger die in größeren Höhen, in denen nur einzelne „Sperrschichten" den Austausch in der Senkrechten örtlich hemmen.

Da von einer Strömung längs der Erdoberfläche ausgegangen war, so bedingt jeder Umstand, der eine nicht unter den Begriff der Turbulenz fallende senkrechte Luftbewegung erzeugt, eine Störung: Messungen auf Gebäuden, an denen die Luft emporgeweht wird, ebenso auf Bergen sind nicht ohne weiteres als Vergleich heranzuziehen, worauf ja schon früher aufmerksam gemacht wurde. Inwiefern sich aber die Ergebnisse der Rechnung mit denen unmittelbarer Beobachtungen in freier Luft decken, sei an A. Wigands Messungen im Flugzeug geprüft[1]). Von zwei Aufstiegen liegen aus je drei Höhen zuverlässige Werte des Gehalts an Ra-Em vor, die in der dritten Spalte der Tabelle III. stehen. Ausgehend von dem in der tiefsten Schicht erhaltenen Wert wurden nun nach unseren Zahlen die in den größeren Höhen zu erwartenden Konzentrationen gerechnet, und zwar für die drei verschiedenen oben benutzten A-Werte. Das Ergebnis steht in den letzten drei Spalten.

Die Übereinstimmung der Beobachtungen mit jenen Werten, die bei einem zwischen 50 und 110 liegenden $\bar{A}$ zu erwarten sind, ist sehr gut; mit Recht kann also in dem abgeleiteten Gesetz der Ausdruck für die tatsächliche Verteilung der Emanationen gefunden werden. Sein Wert liegt aber nicht allein in der Möglichkeit, sofort eine Reihe von zuverlässigen Angaben zu machen über den relativen Gehalt der Luft an Abkömmlingen der radioaktiven Stoffe (abhängig von bereits eingehender studierten meteorologischen Erscheinungen) oder über deren Herkunft (vom Boden allein oder auch aus dem Weltraum); es bietet sich auch umgekehrt ein Weg, rein meteorologisch Wertvolles, über die Herkunft der Luft z. B., aus luftelektrischen Untersuchungen abzuleiten. Jede grobe Nichtübereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung weist auf einen besonderen Umstand in dieser Richtung hin.

Ein weiteres Eingehen auf das senkrechte Gefälle usw., wie wir es früher unternommen hatten, empfiehlt sich nun nicht: das Gesetz dafür würde ziemlich verwickelt. Von Wert ist aber die Angabe des Gesamtgehaltes der Atmosphäre an radioaktiven Stoffen und der Rückschluß auf die Nachfuhr vom Boden her. Jenen erhält man für eine senkrechte Säule von 1 qcm Querschnitt durch graphische Integration

$$S = \int_{1}^{1000000} \varrho \cdot s \cdot dz$$

($\varrho \cdot s$ ist ja der Gehalt der Volumeinheit).

Die Schichten über $z = 8000$ m liefern dazu keinen irgendwie merklichen Beitrag, man erhält also den Gesamtgehalt ohne weitere Einschränkung. Die sekundliche Nachfuhr hingegen vom Boden her muß gleich sein dem sekundlichen Zerfall in der Luftsäule, also $\mathfrak{E}_0 = \lambda \cdot S$ auf 1 qcm.

1) Luftelektrische Untersuchungen bei Flugzeugaufstiegen. Physik. Zeitschr. **25**, 684, 1924.

Tabelle IV.

Emanationsgehalt (S) der Luftsäule von 1 qcm Querschnitt und sekundliche Nachfuhr $\mathfrak{S}_0$ von jedem Quadratzentimeter Boden her, beide ausgedrückt in Vielfachen des Gehaltes s_1 in 1 cm Höhe.

	$\bar{A}=$	22.6	50	116.5
Ra-Em	$10^3 \cdot S_{s_1} =$	2360	4710	8800
Th-Em		4.01	6,62	10,1
Ac-Em		0,81	1,34	1,58
Ra-Em	$10^6 \cdot \mathfrak{S}_{0/s_1} =$	4,96	9,91	18,5
Th-Em		51,0	84,4	120
Ac-Em		144	237	278

Hat man den Gehalt auf die Volumeinheit bezogen statt, wie hier durchwegs geschehen, auf die Masseneinheit, so sind alle Zahlen durch die Luftdichte $\varrho = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ zu dividieren. Die Umrechnung von anderer Bezugshöhe aus, etwa von 1 m, erfolgt leicht mit Hilfe der Tabelle II.

Der Gesamtgehalt, etwa an Radium-Emanation, fällt nun erheblich geringer aus als in unserer früheren Ableitung; mit einem Mittelwert des Emanationsgehaltes in der Nähe des Bodens von

$$130 \cdot 10^{-18} \text{ Curie/ccm} = 104 \cdot 10^{-15} \text{ Curie/g}^1),$$

den wir wohl am besten für 1 m Höhe geltend annehmen, folgt nach Tabelle II $s_1 = 162 \cdot 10^{-15}$, damit für unsere drei Stufen des Austausches:

$$S = 0{,}38 \quad 0{,}76 \quad 1{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ Curie/qcm},$$

gegenüber früher 11,3 solcher Einheiten. In der gesamten Lufthülle der Erde wären enthalten:

$$\bar{S} = 0{,}56 \quad 1{,}14 \quad 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ Curie},$$

wenn man bloß die Festlandsflächen als Emanationsquellen ansieht (früher 16,4). Setzt man die gleiche senkrechte Verteilung auch über den Meeren voraus, erhält man:

$$\bar{S} = 1{,}9 \quad 3{,}9 \quad 7{,}3 \cdot 10^6 \text{ Curie}.$$

Der tatsächliche Wert dürfte dazwischen liegen, näher dem niedrigeren. An diesen Ergebnissen könnte die Annahme eines erheblich größeren Austausches (das würde aber den meteorologischen Befunden widersprechen) auch nichts wesentliches ändern; es reicht eben die Emanation bedeutend weniger weit hinauf. Damit wird auch viel geringere Nachfuhr vom Boden her verlangt:

$$\mathfrak{S}_0 = 0{,}8 \quad 1{,}6 \quad 3{,}0 \cdot 10^{-18} \text{ Curie/qcm sec}$$

(früher 23,6). Wenn die in Dublin und in Manila beobachteten Werte etwa 10 bis 20mal so hoch waren, so dürfte dies doch an irgendwelchen Besonderheiten der Örtlichkeiten oder der Versuchsanordnung gelegen haben.

Die rein qualitativen Feststellungen, die wir früher machten, z. B. über das mangelnde Gleichgewicht zwischen Emanationen und Zerfallsprodukten in jeder Höhe, über die zu vernachlässigende Wirkung reiner Diffusion, über die Herkunft der Emanationen usw. bleiben voll geltend oder werden noch verschärft.

1) Bezüglich der hier und weiter unten erwähnten mittleren Meßergebnisse siehe V. F. Heß, Die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre und ihre Ursachen (Sammlg. Vieweg. Bd. 86. 1926).

Zusammenfassung.

Auf Grund der neuesten Erkenntnisse über die Gesetze der ungeordneten Bewegung in freier Luft wird die zu erwartende Höhenverteilung vom Boden ausgehender Emanationen und weiterer Zerfallsprodukte neu berechnet. Gegenüber der früheren Bestimmung ergibt sich bedeutend raschere Abnahme: im Mittel finden sich Gehalte gleich der Hälfte bzw. einem Zehntel des in 1 m über dem Boden vorhandenen für:

Ra-Em und deren kurzlebige Zerfallsprodukte in	13	bzw. 150 m
Th-Em und *ThA*	1,15 „	1,6 „
ThB und Folgeprodukte	5,8 „	32 „
Ac-Em und *AcA*	1,07 „	1,2 „
AcB und Folgeprodukte	2,2 „	6,0 „

RaD und Folgeprodukte sind ziemlich gleichförmig über die Höhe verteilt.

Für *Ra-Em* stimmt das Ergebnis der Rechnung gut mit Beobachtungen im Flugzeug, die geltenden Ansichten über den Gesamtgehalt der Lufthülle an Emanation und deren Abgabe seitens des Bodens bedürfen wohl einer Korrektur.

Wien, Hochschule für Bodenkultur; Lehrkanzel für Meteorologie.

(Eingegangen 12. April 1926.)

Bemerkungen zu der Mitteilung von Herrn E. Ott: „Röntgenometrische Untersuchungen an hochpolymeren organischen Substanzen zum Zwecke einer Abgrenzung des Molekulargewichts derselben“ [1].

Von R. O. Herzog.

Den Berechnungen von Herrn Ott liegt die Voraussetzung zugrunde, daß der größte vermessene Netzebenenabstand auch gleichzeitig Identitätsperiode ist, daß also die erste auftretende Reflexion mit (100), (010) oder (001) zu indizieren sei. Nur dann, wenn dies für eine der drei

1) Phys. Zeitschr. **27**, 174, 1926.

genannten Ebenen der Fall ist, und auch die beiden anderen Reflexionen in erster Ordnung auftreten, erhält man aus dem Kubus des vermessenen Netzebenenabstandes in der Tat eine obere Grenze für das Volumen des Elementarkörpers. Die bis heute bekannten Gitterstrukturen zeigen aber, daß diese Voraussetzung durchaus nicht immer erfüllt ist. Insbesondere trifft sie nicht zu, wenn eine mehrfach primitive Translationsgruppe vorliegt. In solchen Fällen erhält man nach der Methode des Herrn Ott nicht eine obere Grenze des Elementarkörpers. Wendet man z. B. die Ottsche Rechnungsweise auf das Gitter des Aluminiums an, so erhält man als „obere Grenze" des Elementarkörpervolumens die Zahl 12,8, während das wirkliche Elementarkörpervolumen 67,5 beträgt.

Herr Ott eicht seine Methode an drei organischen Substanzen, deren Gitterstruktur bisher nicht bekannt ist, an der Di-, Tetra- und Oktamylose. Versucht man vorsichtiger die Ottsche Methode an bekannten organischen Strukturen zu verifizieren, so findet man, daß man auch zu kleine Werte für den Elementarkörper erhalten kann. Die nachstehende Tabelle gibt die Zusammenstellung einiger Daten; Resorcin liefert z. B. einen zu kleinen Wert (2,6 statt 4).

Substanz:	Netzebenenabstd. d. l. auftretend. Interferenz in cm · 10^5	Inhalt bei dichtester Packung · 10^{24} cm³	Inhalt des Elementarkörpers in cm³ · 10^{24} gefunden	ber. nach Ott	Molekülzahl im Elementarkörper in cm³ gefunden	ber. nach Ott
Naphthalin $C_{10}H_8$	7,3	61	368,4[1])	388,5	2	6,3
Anthracen $C_{14}H_{10}$	9,2	82	473,5[1])	768,5	2	9,3
Benzoesäure $C_7H_6O_2$	10,8	49	609,4[1])	1267,0	4	26
Phtalsäure $C_8H_6O_2$	7,2	52	695,8[1])	366,7	4	7,0
Harnstoff	4,7		148,8[2])	103,8	2	
Pentaerithrit $C_5H_{12}O_4$	5,2	64	332,2[2])	138,0	2	2,1
α-Naphtol $C_{10}H_8O$	7,4	64	766,0[1])	402,7	4	6,3
Resorcin $C_6H_6O_2$	4,9	45	552,6[1])	114,7	4	2,6

1) Bragg, X-rays and crystal structure. — 2) H. Mark u. K. Weißenberg, Zeitschr. f. Phys. Bd. 16, Heft 1, 1923. — 3) H. Mark u. K. Weißenberg, Zeitschr. f. Phys. Bd. 17, Heft 4/5, 1923.

Es folgt, daß man mittels der Ottschen Methode nicht eine obere Grenze für den Elementarkörper erhält, sondern bloß die Größenordnung; dasgleichegiltfürdieAnzahlderBausteine gewisser Verbindungen in der Elementarzelle (Polysaccharide, Skleroproteine, Kohlenwasserstoffe).

Bei dem großen Interesse, das heute Methoden zur Bestimmung insbesondere der zuletzt genannten Werte für den Chemiker besitzen, ist es wichtig, auf die Unsicherheit hinzuweisen. Anders liegt der Fall, wenn ein Faserdiagramm eingehend diskutiert, auf Grund dieser Diskussion die Symmetrie bestimmt und in Verbindung mit den Ergebnissen der chemischen Untersuchung auf die Größe der Elementarzelle und ihrer Bausteine geschlossen wird, wie dies zuerst von M. Polanyi bei der Zellulose[1]), dann von R. Brill beim Seifenfibroin[2]) geschehen ist. Das Zellulosefaserdiagramm ergibt, daß der Elementarkörper vier Glukosereste enthält. Nach der Ottschen Methode berechnet sich der Wert von 3,3 für die native, 5,8 für die merzerisierte Zellulose, die Elementarzelle könnte 2, 3, 4, 5, 6 Glukosereste enthalten, für den Chemiker bliebe z. B. die Möglichkeit, einen chemischen Baustein $(C_6H_{10}O_5)_3$ anzunehmen, was durch die Rechnung Polanyis als ausgeschlossen erscheint[1]).

1) Naturw. **9**, 288, 337 (1921); vgl. auch Zeitschr. f. angew. Chem. 34, 385 (1921). Ausführl. Mitteil. im Druck.
2) Liebigs Ann. d. Chem. **434**. 204 (1923).

Zusammenfassung.

Es wird an den Beispielen bekannter Strukturen gezeigt, daß die Methode von Ott nicht eine obere Grenze für den Elementarkörper liefert, sondern bloß eine Abschätzung seiner Größenordnung.

1) Immerhin ist bemerkenswert, daß Herr Ott für Di-, Tetra- u. Oktamylose verhältnismäßig große Elementarkörper findet, bei den nativen Polysacchariden dagegen kleine Zahlen, ein Ergebnis, das mit eigenen nicht veröffentlichten Angaben z. B. von Mannan (4), Xylan (nach Ott: 9) übereinstimmt.

Herr Ott meint, daß P. Scherrer zuerst die Kristallstruktur der Zellulose nachgewiesen habe und das Resultat von mir u. W. Jancke „bestätigt" worden sei. Dies ist ein Irrtum; die Veröffentlichungen sind gleichzeitig erfolgt (vgl. Ber. d. Dtsch. Chem. Ges. 53, 2164, Anm. 1920).

(Eingegangen 26. April 1926.)

Die Molekularzerstreuung des Lichtes beim kritischen Zustande.

Von K. C. Kar.

Die Auffassung von der Molekularzerstreuung des Lichtes ist theoretisch wesentlich gefördert durch die Arbeit von A. Einstein[1] im Jahre 1910. Durch Anwendung der Theorie der Smoluchowskischen[2] Dichteschwankungen zeigte Einstein, daß die Relativintensität des zerstreuten Lichtes per Kubikzentimeter der streuenden Substanz, senkrecht zur Einfallsrichtung, gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{RT}{N} \cdot \frac{\beta}{\lambda^4} (\mu^2 - 1)^2 (\mu^2 + 2)^2, \quad (1)$$

wo R und N die in der kinetischen Theorie benutzten bekannten Konstanten, T die absolute Temperatur, β die isotherme Kompressibilität, λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes und μ der Brechungskoeffizient sind.

Der Versuch von Kamerlingh Onnes und Keesom[3] und die neueren Versuche von Raman und Ramanathan[4], Gans[5] u. a., zeigen endgültig, daß die Einsteinsche Gl. (1) die Zerstreuungserscheinungen in realen Gasen und in Flüssigkeiten bei allen Bedingungen mit Ausnahme des kritischen Punktes befriedigend erklärt. Beim kritischen Punkte wird die isotherme Kompressibilität β in Gl. (1) unendlich; nach der Einsteinschen Theorie würde die Intensität des zerstreuten Lichtes also unendlich. Der Versuch von Raman und Ramanathan[6] in der Nähe des kritischen Punktes und der spätere Versuch beim kritischen Zustande von D. K. Bhattacharyya[7] aber zeigen, daß die Intensität nicht unendlich ist. Sie wächst und erreicht ihr Maximum beim kritischen Punkte, nach welchem sie wieder abnimmt. Beim kritischen Zustande versagt also die Einsteinsche Theorie vollständig.

Ornstein und Zernike[8] haben die Einsteinsche Gleichung für den kritischen Punkt verbessert. Danach ist nach ihren Bezeichnungen:

$$\alpha = \frac{\frac{2\pi^2 v RT}{N} \cdot v\mu^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 \lambda^{-4}}{-\frac{\partial p}{\partial v} + 4\pi^2 \frac{RT}{v^2} (1 + \cos \Phi) \left(\frac{\varepsilon}{\mu \lambda}\right)^2} \quad (2)$$

Wenn das zweite Glied im Nenner dieser Gleichung verschwindet, geht Gl. (2) in die Einsteinsche Gl. (1) über. Beim kritischen Zustande ist aber $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ und also

$$\alpha_{krit.} = \frac{\frac{V}{2N} \cdot v^3 \mu^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)^2 \lambda^{-4}}{(1 + \cos \Phi) \left(\frac{\varepsilon}{\mu \lambda}\right)^2}. \quad (3)$$

In ihrer Arbeit haben Ornstein und Zernike gegen die Smoluchowskische Methode zur Berechnung der kritischen Dichteschwankung die Einwendung gemacht, daß Smoluchowski „gegenseitige Unabhängigkeit" der Volumelemente angenommen habe. Da aber bei Berechnung der kritischen Dichteschwankung Smoluchowski die van der Waalssche Zustandsgleichung verwendet hat, die die gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Volumelemente annimmt, so denkt der Verfasser, daß die Smoluchowskische Methode in dieser Beziehung einwandfrei ist.

Ferner ist bemerkenswert, daß bei der Ableitung ihrer Formel für den kritischen Zustand Ornstein und Zernike den zeitlichen Mittelwert des Produktes aus dem Quadrat des von jedem Moleküle ausgesandten Lichtvektors und dem Quadrat der Anzahl der Moleküle benutzen (d. h. $\overline{n^2 \cdot L^2}$); die Einsteinsche Zerstreuungsgleichung ist aber abgeleitet durch Benutzung des Produktes des Scharmittelwerts aus dem Quadrat der Anzahl der Moleküle und der Intensität des Lichtes (d. h. $\overline{n^2} \cdot \overline{L^2}$). Der Verfasser meint, daß man ernste Einwendungen erheben kann gegen die Ornstein-Zernikesche Methode der Mittelbildung. Wir möchten also bemerken, daß ε in Gl. (2) nicht verschwindet, wenn die zerstreuende Substanz eine Flüssigkeit ist und so wird Gl. (2) nicht reduziert auf Gl. (1). Aber die oben erwähnten Versuche zeigen ohne weiteres, daß in einer Flüssigkeit die Einsteinsche Gleichung gültig ist.

In dieser Arbeit wird die Einsteinsche Gl. (1) für den kritischen Zustand modifiziert und es soll gezeigt werden, daß die neue abgeleitete Gleichung die Resultate von D. K. Bhattacharyya[1] erklärt.

Rayleigh[2] u. a. haben mit Hilfe der elektromagnetischen Theorie des Lichtes gezeigt, daß

1) Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 275, 1910.
2) Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908.
3) Kamerlingh Onnes und Keesom, Ann. d. Phys. **35**, 591, 1911.
4) Raman und Ramanathan, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 104, 1923; siehe auch K. R. Ramanathan, Proc. Roy. Soc. Vol. 102, 1922.
5) Gans, Zeitschr. f. Phys. **17**, 353, 1923 u. Contribución al estudio de las ciencias Físicas y Matemáticas. La Plata, 1923.
6) Raman u. Ramanathan, l. c.
7) D. K. Bhattacharyya, Proc. Ind. Assoc. for Cult. Sci. **8**, 277, 1923.
8) Ornstein u. Zernike, Proc. Amsterd. Akad. **17**, 793, 1915.

1) D. K. Bhattacharyya, l. c.
2) Rayleigh, Collected Papers.

die Relativintensität des zerstreuten Lichtes senkrecht zur Einfallsrichtung, pro Zentimeter der Entfernung, gegeben ist durch

$$a = \frac{\pi^2 \cdot \overline{\Delta(\mu^2)^2} \cdot \Delta v^2}{2\lambda^4}, \qquad (4)$$

wo μ der Brechungskoeffizient und Δv das Volumen sind. Kombiniert man Gl. (4) mit der wohlbekannten Lorentz-Lorenzschen Formel

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = \text{konst.}\, \varrho, \qquad (5)$$

so hat man

$$a = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{(\mu^2 - 1)^2 (\mu^2 + 2)^2}{\lambda^4} \cdot \left(\frac{\overline{\Delta\varrho^2}}{\varrho^2}\right), \qquad (6)$$

wo ϱ die Dichte ist.

Die Gültigkeit dieser allgemeinen Gleichung hängt von den in der Flüssigkeit und im Gase gültigen Gln. (4) und (5) ab. Bei gewöhnlicher Temperatur ist

$$\left(\frac{\overline{\Delta\varrho^2}}{\varrho^2}\right) = \frac{RT\beta}{N\Delta v} \qquad (7)$$

und durch Kombination der Gln. (6) und (7) erhalten wir die in der Flüssigkeit und im Gase geltende Einsteinsche Gl. (1). Beim kritischen Zustande ist aber die Dichteschwankung $\frac{\overline{\Delta\varrho^2}}{\varrho^2}$ nicht gegeben durch Gl. (7); wir leiten die kritische Dichteschwankung in folgender Weise ab:

In meiner früheren Arbeit[1]) wird gezeigt, daß beim kritischen Zustande

$$\overline{\Delta p^4} = -\Theta^3 \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial v^3} \qquad (8)$$

und

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 p}{p v^3}\right) \cdot \overline{\Delta v^3}, \qquad (9)$$

wo p der Druck, v das Volumen und Θ das Produkt der Boltzmannschen Konstante und der absoluten Temperatur sind. Nach Gln. (8) und (9) haben wir

$$\overline{\Delta v^{12}} = \frac{-6^4 \cdot \Theta^3}{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)^3}. \qquad (10)$$

1) K. C. Kar, Diese Zeitschr. **25**, 397, 1924.

Erinnert man sich, daß

$$\beta = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p}, \qquad (11)$$

so hat man

$$\overline{\Delta v^{12}} = \frac{6^4 \cdot \Theta^3}{\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\beta v}\right)\right]^3}. \qquad (12)$$

Daraus folgt näherungsweise

$$\frac{\overline{\Delta\varrho^2}}{\varrho^2} = \frac{\overline{\Delta v^2}}{v^2} = \frac{6^{4/3} \cdot \Theta^{2/3}}{v^2 \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\beta v}\right)\right]^{1/3}}. \qquad (13)$$

So erhält man für den kritischen Zustand anstatt der Einsteinschen Zerstreuungsgleichung (1)

$$a_{kr} = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{(\mu^2 - 1)^2 (\mu^2 + 2)^2}{\lambda^4} \cdot \frac{6^{4/3} \cdot \Theta^{2/3}}{\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\beta v}\right)\right]^{1/3}}.$$

In seinem Versuch mit CO_2 nimmt Herr Bhattacharyya[1])

$$\lambda = 5400\ \text{Å}$$
$$\Theta = 1{,}05 \cdot 10^{-16} \times 304 \cdot 35$$

und $\mu^2 = 1{,}285$ nach der Phillipsschen empirischen Formel[2]). Wir können den Wert von $\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\beta v}\right)\right]^{1/3}$ angenähert berechnen mit Benutzung der Daten von Amagat[3]) in der Umgebung des kritischen Punktes. Er ist $20{,}1 \times 10^4$. Ersetzen wir diese Werte in Gl. (14), so haben wir

$$a_{kr} = 16{,}7 \times 10^{-4},$$

während der Bhattacharyyasche Wert ist

$$a_{kr} = 10{,}34 \times 10^{-4}.$$

Man versteht diesen Unterschied, wenn man sich daran erinnert, daß die Genauigkeit der Amagatschen kritischen Daten für diesen Fall wohl nicht ausreicht.

1) D. K. Bhattacharyya, l. c.
2) Phillips, Proc. Roy. Soc. A. Vol. 97, p. 225.
3) Landolt-Börnstein, Tabellen oder Amagat, C. R. 111, 871, 1890 u. Ann. Chim. Phys. (6) **29**, 68 u. 505, 1893.

Kalkutta (Indien), 5. Februar 1926.

(Eingegangen 1. März 1926.)

BESPRECHUNGEN.

H. v. Jüptner, Gas, Dampf und Flüssigkeit. 8°. II u. 61 S. m. 7 Abb. Leipzig, Otto Spamer. 1925. Geh. M. 5.—.

Das Heft, das einen erweiterten Sonderabdruck aus „Feuerungstechnik" XIII darstellt, befaßt sich mit den Abweichungen der realen Gase von der Zustandsgleichung von van der Waals und ähnlichen, die nur Binnendruck und Volumkorrektion berücksichtigen. Es wird zunächst an Hand eines reichhaltigen und an sich dankenswerten Tabellenmaterials der Verlauf der Zustandsgrößen (pv, v, $1-pv$) in verschiedenen Temperaturbereichen (bis zur kritischen, von dieser bis zur Boyle-Temperatur und darüber) verfolgt und hierdurch eine hübsche Charakteristik der verschiedenen Zustandsgebiete (S. 45) gegeben. Die Quintessenz der Arbeit ist nun die, daß der Verlauf gewisser Zustandsgrößen in gewissen Gebieten dem Verfasser durch Gleichungen nach Art der van der Waalsschen schon qualitativ ungenügend ausdrückbar erscheint. Die Lösung wird in der Annahme gesehen, daß das Gas auch außerhalb des Verflüssigungsgebietes Molekülanhäufungen, d. i. Flüssigkeitskeime, und die Flüssigkeit Molekelgruppen geringer Dichte, d. i. Dampfkeime, enthält. Die von Smoluchowski aus statistischen Gründen geforderten Stellen unwahrscheinlicherer Massenverteilung sollen so zu einer Modifikation der Zustandsgleichung herangezogen werden, die sämtliche Erscheinungen bei der Kompression von Gasen und Dämpfen umfaßt. Der Zweck vorliegender Studie soll nur der sein, zu derartigen Arbeiten anzuregen. Es werden Experimentaluntersuchungen in bestimmten Zustandsgebieten vorgeschlagen. Die Fruchtbarkeit der Idee zugegeben, will es dem Referenten scheinen, daß eine bloße Diskussion der Zustandskurven oder selbst ihre weitere Vermessung nichts dafür oder dawider entscheiden kann. Sie hat in ihrer Epoche wohl schon das geliefert, was ihr einwandfrei und fruchtbringend zu entnehmen ist. Es müßten vielmehr jetzt Untersuchungen auf anderen Wegen über die Berechtigung des vorgeschlagenen Verfahrens entscheiden.

G.-M. Schwab.

A. Schulze, Die thermische Leitfähigkeit. XII u. 147 Seiten mit 26 Figuren und einem großen beigegebenen Übersichtsdiagramm. 4. Lieferung (6. Heft) des Handbuches „Metallographie", herausgegeben von Prof. Dr. W. Guertler, Berlin-Charlottenburg. Berlin, Gebr. Borntträger. 1925. Geh. M. 15.20.

Im Anschlusse an sein Buch „Die elektrische Leitfähigkeit" ist nunmehr im gleichen Rahmen die Wärmeleitfähigkeit in dem vorliegenden Buche behandelt. Der Inhalt zerfällt in einen einführenden Teil und in drei Hauptteile. In der Einführung wird kurz auf die grundlegenden Gedanken der Theorie der thermischen Leitfähigkeit hingewiesen und auf den Zusammenhang derselben mit dem periodischen System der Elemente. Von den Meßmethoden zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit wird die von Lees, Kohlrausch, Langmuir und schließlich die von Mendenhall-Angell besprochen. In dem darauf folgenden ersten Hauptteil finden sich die Angaben über die Leitfähigkeit der Metalle und der variablen Leiter in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur zusammengestellt (S. 23 bis 107). Der zweite Hauptteil behandelt in 8 getrennten Kapiteln die Beeinflussung der Wärmeleitfähigkeit durch mechanisch-physikalische Zustandsänderungen: Pulverisierung, Modifikationsumwandlung, Änderung des Aggregatzustandes, Verformung, Druck, Magnetfeld, Belichtung und Kristallstruktur (S. 109 bis 130). Der dritte Hauptteil schließlich behandelt die Temperaturleitfähigkeit, d. h. die auf die Einheit der Dichte und Wärmekapazität umgerechnete Leitfähigkeit für jene Metalle, bei welchen Messungen über die Temperaturleitfähigkeit vorliegen (S. 131 bis 139). — In einem Anhang sind mehrere Tafeln zusammengestellt, die die thermische Leitfähigkeit, das Leitverhältnis und die Lorenzsche Zahl bei verschiedenen Temperaturen übersichtlich zusammengestellt enthalten; schließlich eine Zusammenstellung der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit sowie deren Temperaturwandlung.

Die Darstellung ist einheitlich so durchgeführt, daß die thermische Leitfähigkeit wiedergegeben wird in unmittelbarem Anschluß an ihre Beziehung zur elektrischen Leitfähigkeit (Zahl von Wiedemann und Franz) und durch die Abweichung von der Lorenzschen Regel (Lorenzsche Zahl). Dadurch erhält die ganze Darstellung einen einheitlichen Zug, der auch die Benutzung des Buches und des darin in verdienstvoller Weise zusammengetragenen reichen Zahlenmaterials erleichtert. Daß den theoretischen Untersuchungen auf diesem Gebiete nur in sehr eingeschränktem Umfang Rechnung getragen ist, wird man bei dem krisenhaften Übergangszustand, in dem sich die physikalische Theorie auch auf dem vorliegenden Teilgebiet befindet, nicht mißbilligen können.

Zusammenfassend kennzeichnet Verfasser den gegenwärtigen Stand der Erkenntnis über das Wesen der Wärmeleitfähigkeit wie folgt: „ . . . es scheint fast, daß die thermische Leitfähigkeit der Metalle doch nicht unmittelbar mit der elektrischen Leitfähigkeit zusammenhängt, sondern daß sie vielleicht auch bei den Metallen, ähnlich wie bei den elektrisch nichtleitenden Kristallen, mehr mit der Dämpfung der elastischen Wellen zu tun hat und daß der Zusammenhang mit der elektrischen Leitfähigkeit mehr ein indirekter ist."

K. Lichtenecker.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Tübingen Dr. Hans Rosenberg in gleicher Eigenschaft an der Universität Kiel, der Privatdozent an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Dr. Alfred Berroth zum ord. Professor der Geodäsie ebenda, der Fabrikdirektor Dr. Rob. Haller in Großenhain zum Honorarprofessor in der chemischen Abteilung der Technischen Hochschule Dresden, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Wien Dr. Moritz Dolch zum ord. Professor für chemische Technologie an der Universität Halle, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Lund Dr. O. Collenberg in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule in Stockholm (als Nachfolger von Professor Odén).

Gestorben: Der ord. Professor für Luftschiffahrt und Automobilwesen an der Technischen Hochschule Wien Dr. Richard Knoller.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.